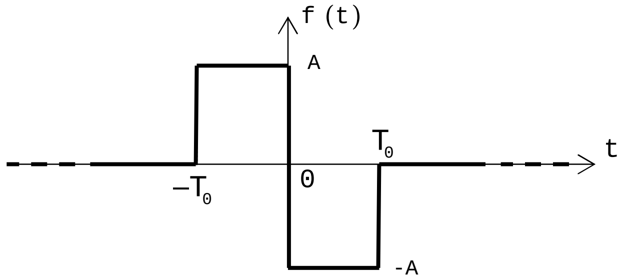
NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /20

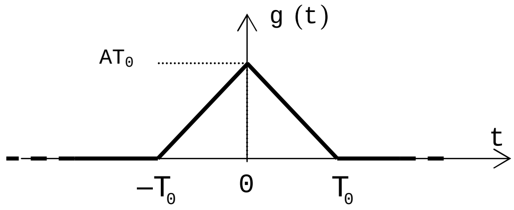
Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

Exercice 1: 4

Considérons les fonctions f et g suivantes :





3 **1)** Déterminez la fonction de transfert harmonique du SLIT qui aurait la fonction g(t) pour réponse à l'excitation f(t) ?

$$H(\nu) = \frac{G(\nu)}{F(\nu)} \quad \text{or} \quad f(t) = A.\text{rect}\left(\frac{t+\frac{T_0}{2}}{T_0}\right) - A.\text{rect}\left(\frac{t-\frac{T_0}{2}}{T_0}\right) \quad \text{et}$$

$$g(t) = AT_0.\text{tri}\left(\frac{t}{T_0}\right) \quad \text{d'où}$$

$$F(\nu) = AT_0.\text{sinc}(T_0\nu)\, e^{+j2\pi\nu\frac{T_0}{2}} - AT_0.\text{sinc}(T_0\nu)\, e^{-j2\pi\nu\frac{T_0}{2}}$$

$$F(\nu) = 2jAT_0.\text{sinc}(T_0\nu)\left[\frac{e^{+j2\pi\nu\frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi\nu\frac{T_0}{2}}}{2j}\right] = 2jAT_0.\text{sinc}(T_0\nu)\sin\left(2\pi\nu\frac{T_0}{2}\right)$$

$$G(\nu) = AT_0^2.\text{sinc}^2(T_0\nu)$$

$$H(\nu) = \frac{G(\nu)}{F(\nu)} = \frac{\cancel{A}T_0^{\cancel{2}}.\text{sinc}^{\cancel{2}}(T_0\nu)}{2j\cancel{AT_0}.\cancel{\text{sinc}(T_0\nu)}\sin\left(\cancel{2}\pi\nu\frac{T_0}{\cancel{2}}\right)}$$

$$H(\nu) = \frac{T_0.\text{sinc}(T_0\nu)}{2j\sin(\pi\nu T_0)} = \frac{\cancel{T_0}\,\cancel{\sin(\pi T_0\nu)}}{2j\pi\cancel{T_0}\,\nu\,\cancel{\sin(\pi\nu T_0)}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{H(\nu) = \frac{1}{j2\pi\nu}}$$

0,5 Montrez que cette fonction de transfert $H(\nu)$ peut se mettre sous la forme $H(\nu) = \dfrac{1}{\alpha.\nu}$ où l'on précisera la valeur α.

$\boxed{\alpha = j2\pi}$

0,5 Comment se nomme ce SLIT ?
Ce SLIT est un intégrateur

Exercice 2: 4,5

Considérons un filtre linéaire retardateur pur qui ne déforme pas le signal, mais le retarde simplement d'un temps t_0.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{RETARDATEUR PUR } t_0} \longrightarrow y(t)$$

1) Déterminez par deux méthodes différentes $C_{yx}(\tau)$ l'intercorrélation entre y(t) et x(t) en fonction de $C_{xx}(\tau)$.

1,5 ***Méthode 1***

Utilisation du théorème de Wiener-Khintchine.

$$C_{yx}(\tau) \xrightarrow{\text{Fourier}} S_{yx}(\nu) = Y(\nu)\,X^*(\nu)$$

Or $y(t) = x(t - t_0)$ d'où $Y(\nu) = X(\nu)\,e^{-j2\pi\nu t_0}$ donc

$$S_{yx}(\nu) = X(\nu)\,X^*(\nu)\,e^{-j2\pi\nu t_0} \xrightarrow{\text{Fourier}^{-1}} C_{yx}(\tau) = C_{xx}(\tau - t_0)$$

$$\boxed{C_{yx}(\tau) = C_{xx}(\tau - t_0)}$$

1,5 ***Méthode 2***

Utilisation de la définition de $C_{yx}(\tau)$.

$$C_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,x^*(t-\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\,x^*(t-\tau)\,dt$$

On procède alors au changement de variable suivant $\begin{cases} \theta = t - t_0 \\ d\theta = dt \end{cases}$

$$C_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\,x^*(\theta - (\tau - t_0))\,d\theta = C_{xx}(\tau - t_0)$$

$$\boxed{C_{yx}(\tau) = C_{xx}(\tau - t_0)}$$

1,5 **2)** Déterminez, par la méthode de votre choix, la fonction de transfert harmonique $H(\nu)$ d'un tel filtre.

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{\cancel{X(\nu)}e^{-j2\pi\nu t_0}}{\cancel{X(\nu)}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{H(\nu) = e^{-j2\pi\nu t_0}}$$

En déduire la réponse impulsionnelle de ce filtre.

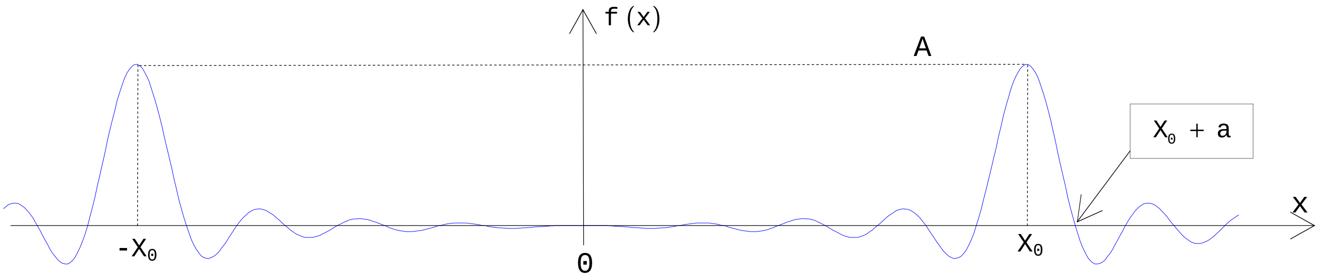
$$H(\nu) = 1.e^{-j2\pi\nu t_0} \xrightarrow{\text{Fourier}^{-1}} h(t) = \delta(t - t_0)$$

Ce qui était prévisible car ce SLIT n'est qu'un retardateur pur.

$$\boxed{h(t) = \delta(t - t_0)}$$

Exercice 3: 6

Considérons le signal f(x) suivant :



1 **1)** Déterminer l'expression mathématique de f(x).

$$\boxed{f(x) = A\,\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) * \left(\delta(x - X_0) + \delta(x + X_0)\right)}$$

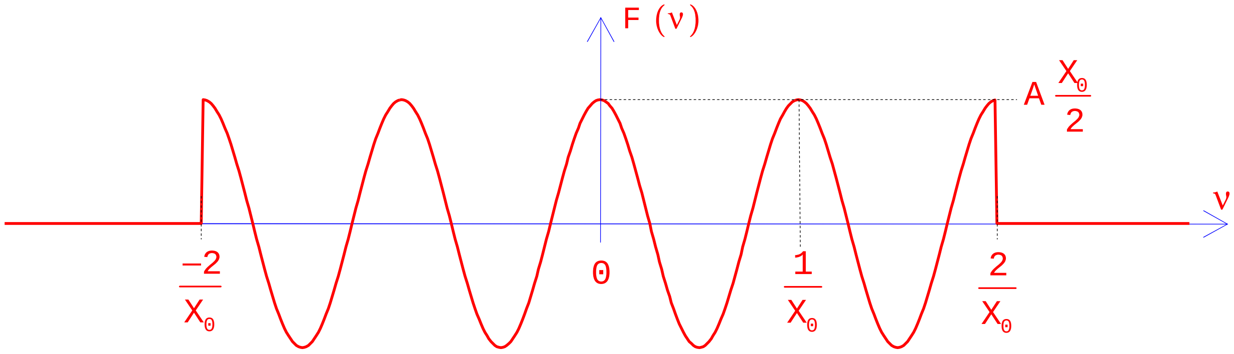
2) Calculer $F(\nu)$ la transformée de Fourier de f(x) (on notera que comme f(x) est une fonction paire, $F(\nu)$ sera réelle).

2 $$F(\nu) = Aa\,\text{rect}(a\nu)\cdot\left(e^{-j2\pi\nu X_0} + e^{j2\pi\nu X_0}\right) = 2Aa\,\text{rect}(a\nu)\cos(2\pi\nu X_0) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{F(\nu) = 2Aa\,\text{rect}(a\nu)\cos(2\pi X_0 \nu)}$$

0,5 Représenter graphiquement $F(\nu)$ pour $a = \frac{X_0}{4}$

Pour $a = \frac{X_0}{4}$, $\boxed{F(\nu) = A\frac{X_0}{2}\,\text{rect}\left(\frac{X_0}{4}\nu\right)\cos(2\pi X_0 \nu)}$



On souhaite maintenant échantillonner le signal f(x).

2,5 **3)** Déterminez l'ensemble des paramètres nécessaires au bon d'échantillonnage de f(x). On expliquera la méthode.

Pour échantillonner un signal dans le respect des règles de Shannon, il faut fixer la fréquence d'échantillonnage à au moins deux fois la plus haute des fréquences contenues dans ce signal si cette fréquence existe. Si le spectre n'est pas à support borné, il faut se fixer un spectre utile à l'aide d'un filtre anti repliement. D'une façon générale le filtre anti repliement évite aussi le repliement spectral du bruit et des parasites hautes fréquences.

Dans le cas de f(x), son spectre est à support borné. Sa fréquence maximale est de $F_{max} = \frac{1}{2a}$. Il faudra donc échantillonner à au moins $F_{échantillonnage} \geq 2F_{max} = \frac{1}{a}$. En théorie, dans notre cas présent, le filtre anti repliement n'est pas nécessaire. Cependant pour les raisons énoncées précédemment sa présence reste en pratique souhaitable. Ce filtre devra avoir les caractéristiques suivantes :

- Fin de la bande passante à $F_{max} = \frac{1}{2a}$
- Début de la bande atténuée $\frac{F_{échantillonnage}}{2}$
- Topologie Butterworth si on souhaite minimiser les distorsions d'amplitude ou topologie Bessel si on souhaite minimiser les distorsions de phase.

Questions de Cours: 5,5

2,5 **1)** Soit $f_A(x)$ un signal **périodique** de période A représentant une pression en Pascal. La variable x représente un angle en radian.
Quelles propriétés remarquables a la fonction d'autocorrélation $C_{f_Af_A}(\tau)$?
L'autocorrélation d'un signal périodique est un signal périodique de même période contenant toutes les composantes spectrales du signal et seulement celle-ci. La phase est cependant perdue.
(Pour plus d'informations, voir cours)

Quelle est l'unité de τ ?
La même que x : le radian

Quelle est l'unité de $C_{f_Af_A}(\tau)$?
Dans le cas des fonctions périodiques,

$$C_{f_Af_A}(\tau) = \frac{1}{A}\int_{-\frac{A}{2}}^{+\frac{A}{2}} f_A(x)\, f_A^*(x-\tau)\, dx\,.$$

L'unité sera donc Pa^2.

Que représente $C_{f_Af_A}(0)$?

$C_{f_Af_A}(0) = \frac{1}{A}\int_{-\frac{A}{2}}^{+\frac{A}{2}} f_A(x)\, f_A^*(x)\, dx$ représente la puissance moyenne du signal sur une période.

1,5 **2)** Considérons un signal x(t) composé de $e_T(t)$ une fonction périodique de période T noyée dans du bruit blanc b(t) de DSP A_0.

$$x(t) = e_T(t) + b(t)$$

Que pouvez-vous dire de $C_{xx}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de x(t) et de quoi sera composée sa représentation graphique ?

$$C_{xx}(\tau) = C_{e_Te_T}(\tau) + C_{e_Tb}(\tau) + C_{be_T}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

$C_{e_Te_T}(\tau)$ est une fonction périodique de période T

$C_{e_Tb}(\tau)$ et $C_{be_T}(\tau)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 en moyenne.

$C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$

Si on effectue plusieurs réalisations moyennées, l'autocorrélation finale sera composée principalement des termes $C_{e_Te_T}(\tau)$ et $C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$.

1,5 **3)** Quelle propriété doit avoir la réponse impulsionnelle d'un SLIT dont la phase (l'argument) de la fonction de transfert est proportionnelle à la fréquence ?

La fonction de transfert sera de la forme $H(\nu) = F(\nu)\,e^{j\nu\alpha}$ où $F(\nu) \in \mathbb{R}$. La réponse impulsionnelle sera alors de la forme $h(t) = f\left(t + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$ où f est une fonction paire. $h(t)$ ressemble donc à une fonction paire décalée de la valeur $t_0 = \frac{-\alpha}{2\pi}$.

$h(t)$ présente donc une symétrie verticale. Par exemple :