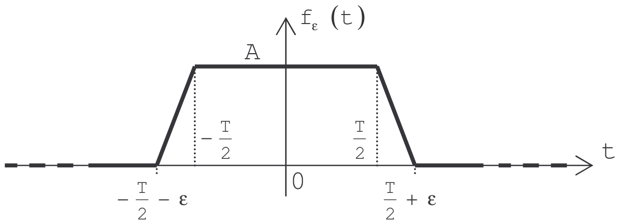
NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /22

Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

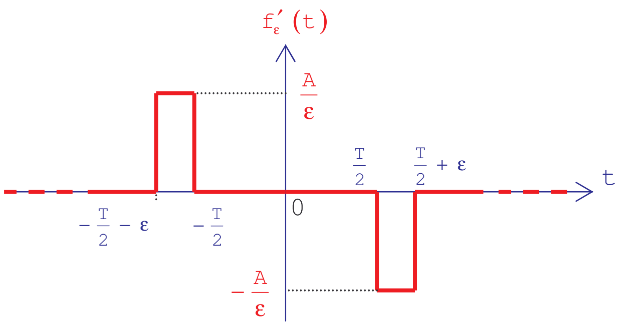
EXERCICE 1 6

Considérons le signal $f_\varepsilon(t)$ suivant :



1) Représenter graphiquement $f'_\varepsilon(t)$ la dérivée de $f_\varepsilon(t)$.

0,5



Déterminer l'expression littérale de $f'_\varepsilon(t)$

1,5

$$f'_\varepsilon(t) = \frac{A}{\varepsilon}\left(\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T+\varepsilon}{2}}{\varepsilon}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T+\varepsilon}{2}}{\varepsilon}\right)\right)$$

Déterminer l'expression de $f'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[f'_{\varepsilon}(t) \right]$

1 Lorsque ε tend vers 0, les rectangles subissent les déformations suivantes :

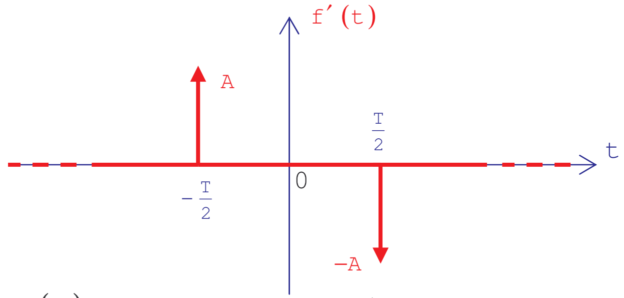
- Leur largeur tend vers 0.
- Leur hauteur tend vers l'infini.
- Leur surface reste constante et égale à A.

Les rectangles deviennent donc des pics de Dirac.

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[f'_{\varepsilon}(t) \right] = -A \cdot \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + A \cdot \delta\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Représenter graphiquement $f'(t)$.

0,5



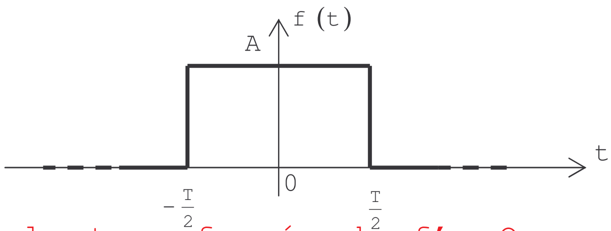
1,5 **2)** Déterminer $G(\nu)$ la transformé de Fourier de $f'(t)$.

$$f'(t) = -A \cdot \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + A \cdot \delta\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

$$G(\nu) = -A \cdot e^{-j2\pi\nu\frac{T}{2}} + A \cdot e^{j2\pi\nu\frac{T}{2}} = A\left(e^{j\pi\nu T} - e^{-j\pi\nu T}\right)$$

3) En utilisant les questions précédentes retrouver $F(\nu)$, la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ suivante :

(Résultat bien connu)



1 On connaît la transformée de f'. On peut donc en déduire la transformée de f à l'aide du théorème de la dérivation des transformées de Fourier.

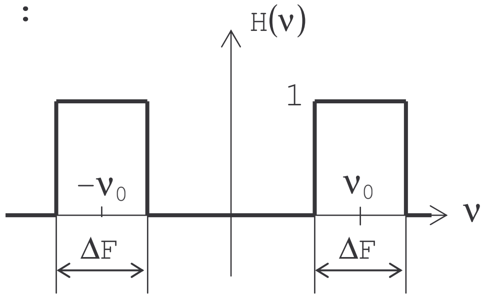
$$f(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} F(\nu)$$

$$f'(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} G(\nu) = j2\pi\nu \cdot F(\nu)$$

d'où $F(\nu) = \dfrac{AT}{\pi\nu T} \dfrac{\left(e^{j\pi\nu T} - e^{-j\pi\nu T}\right)}{2j} = AT\mathrm{sinc}(\nu T)$

EXERCICE 2 5

(Exercice extrait du polycopié de cours)
Considérons un système linéaire ayant un comportement de filtre passe-bande idéal dont la fonction de transfert a l'allure suivante :



1 Exprimer littéralement la fonction de transfert $H(\nu)$.

$$H(\nu) = \mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta F}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \nu_0}{\Delta F}\right)$$

1) Déterminer la réponse impulsionnelle d'un tel système.

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

1,5 Grâce au théorème de similitude on obtient :

$$\Delta F \cdot \mathrm{sinc}(\Delta F t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{\Delta F}\right)$$

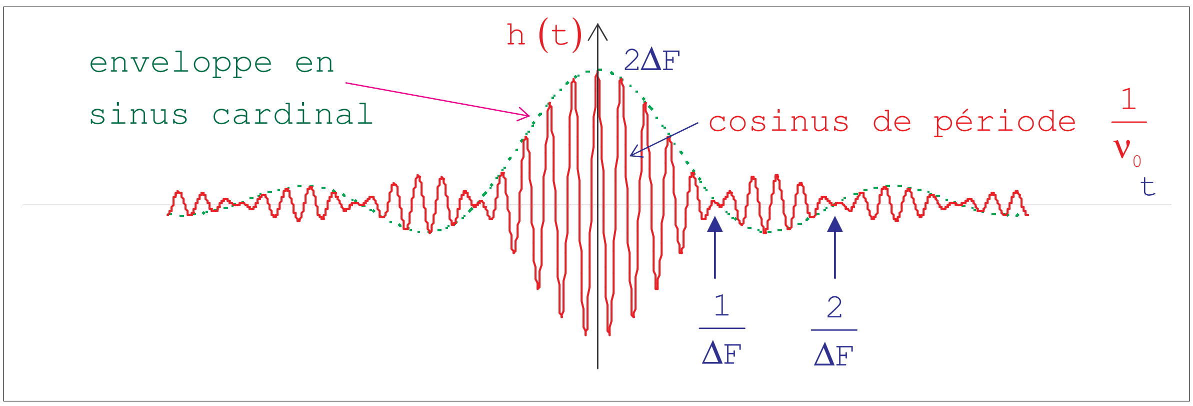
Puis en utilisant la réciproque du théorème du retard, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta F \cdot \mathrm{sinc}(\Delta F t)\, e^{j2\pi\nu_0 t} \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta F}\right) \\ \Delta F \cdot \mathrm{sinc}(\Delta F t)\, e^{-j2\pi\nu_0 t} \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \nu_0}{\Delta F}\right) \end{cases}$$

d'où $h(t) = \Delta F \cdot \left(e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}\right) \mathrm{sinc}(\Delta F t)$

Enfin $\boxed{h(t) = 2\Delta F \cdot \mathrm{sinc}(t\Delta F) \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)}$

1 Représenter graphiquement cette réponse impulsionnelle.



Un tel système est-il réalisable comme filtre à variable temporelle ? Et comme filtre à variable d'espace ? (Justifier vos réponses)

1,5
- Le système n'est pas réalisable en tant que système linéaire à variable temporelle car sa réponse impulsionnelle n'est pas causale.

- En tant que système linéaire à variable d'espace, la causalité n'est plus un problème. Cependant, la réponse impulsionnelle n'étant pas à support borné, elle n'est pas physiquement réalisable. On peut cependant en obtenir une approximation en se limitant à quelques lobes.

EXERCICE 3 2

(Exercice extrait des annales d'examen SY53)
Considérons un système linéaire retardateur pur (qui ne déforme pas le signal, mais le retarde simplement).

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{RETARDATEUR PUR } t_0} \longrightarrow e(t-t_0)$$

1 **1)** Déterminer la fonction de transfert harmonique $H(\nu)$ d'un tel système.

$e(t) \xrightarrow{\text{retard}} s(t) = e(t-t_0)$ d'où $S(\nu) = E(\nu)\,e^{-j2\pi\nu t_0}$

On sait par ailleurs que $S(\nu) = E(\nu)\,H(\nu)$

D'où $\boxed{H(\nu) = e^{-j2\pi\nu t_0}}$

1 **2)** Retrouver, en utilisant le résultat du **1)**, la réponse impulsionnelle h(t) d'un tel système (le résultat est d'ailleurs intuitivement connu)

$h(t)$ est la transformée inverse de Fourier de $H(\nu)$.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu t_0} e^{j2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu(t-t_0)} d\nu = \delta(t-t_0)$$

$$\boxed{h(t) = \delta(t-t_0)}$$

(Résultat prévisible pour un retardateur pur)

EXERCICE 4 6

(Introduction à l'échantillonnage)

L'échantillonnage idéal (ou mathématique) consiste à multiplier la fonction à échantillonner par un peigne de dirac.

Considérons un signal f(t) que l'on échantillonne à l'aide d'un peigne de Dirac de période T_e.

1 **1)** Déterminer $f_e(t)$ l'expression du signal échantillonné (détailler l'expression).

$$f_e(t) = f(t) \cdot pgn_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT_e)$$

$$\boxed{f_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)}$$

2) Déterminer $F_e(\nu)$ l'expression de la transformée de Fourier du signal échantillonné $f_e(t)$.

$$f_e(t) = f(t) \cdot pgn_{T_e}(t)$$

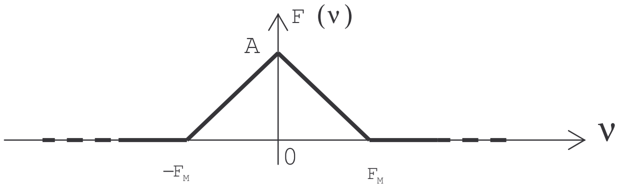
1,5

$$F_e(\nu) = F(\nu) * \frac{1}{T_e} pgn_{\frac{1}{T_e}}(\nu) = F(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_e \cdot \delta(\nu - n\nu_e) \text{ où } \nu_e = \frac{1}{T_e}.$$

$$\boxed{F_e(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_e \cdot F(\nu - n\nu_e)}$$

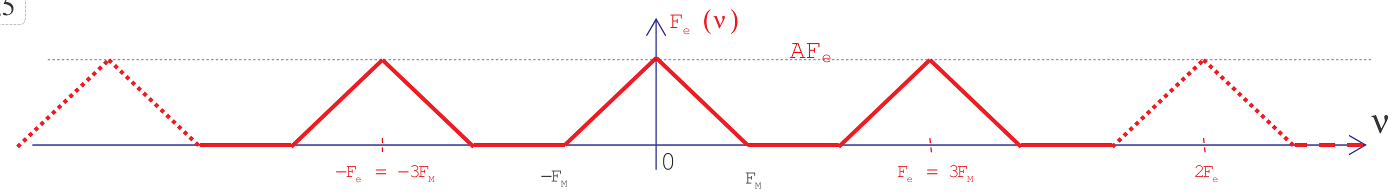
Le spectre de $f_e(t)$ est donc constitué du spectre de f(t) répété périodiquement à chaque multiple de la fréquence d'échantillonnage ν_e et affecté du coefficient ν_e.

Si on considère que $F(\nu)$ a l'allure suivante, représenter $F_e(\nu)$ dans les différents cas énoncés :

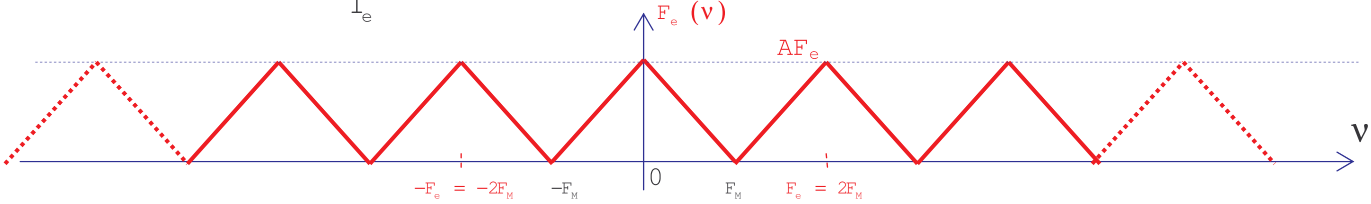


Cas n°1 : $F_e = \frac{1}{T_e} = 3F_M$

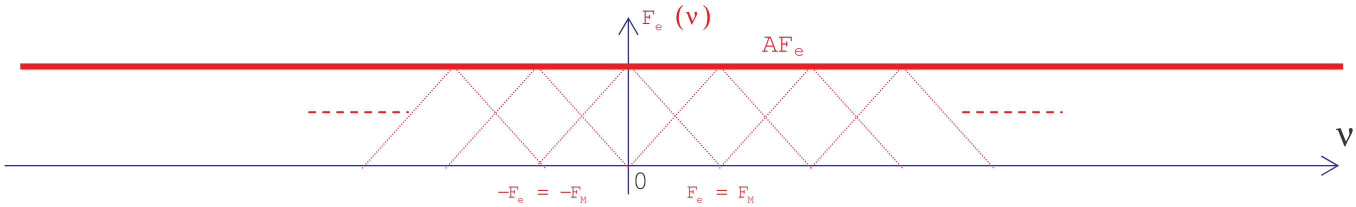
0,5



0,5 Cas n°2 : $F_e = \dfrac{1}{T_e} = 2F_M$



0,5 Cas n°3 : $F_e = \dfrac{1}{T_e} = F_M$

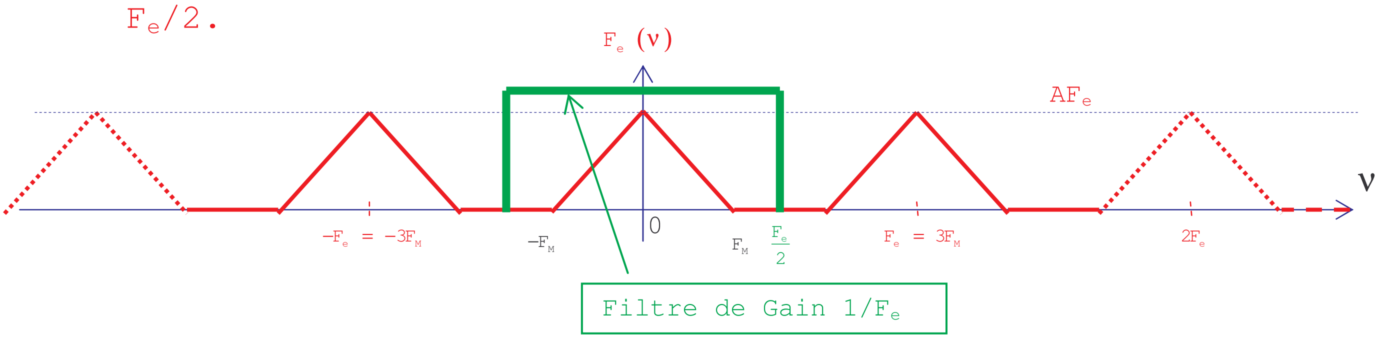


On souhaite reconstituer le signal d'origine f(t) à partir du signal échantillonné $f_e(t)$.

2 **3)** Est-il possible de reconstituer f(t) à partir de $f_e(t)$ dans chacun des trois cas décrits précédemment ? Expliquer votre réponse et donner la façon de procéder lorsque la reconstitution vous semble possible.

Cas n°1 :

Les motifs spectraux sont disjoints. Il est donc envisageable de « gommer » les motifs indésirables afin de récupérer un unique motif central. Il suffit de filtrer passe-bas avec un filtre idéal ayant pour gain dans la bande passante la valeur T_e et pour fréquence de coupure $F_e/2$.



Cas n°2 :

C'est un cas limite. Seul un filtre idéal (irréalisable en pratique) peut extraire le motif central.

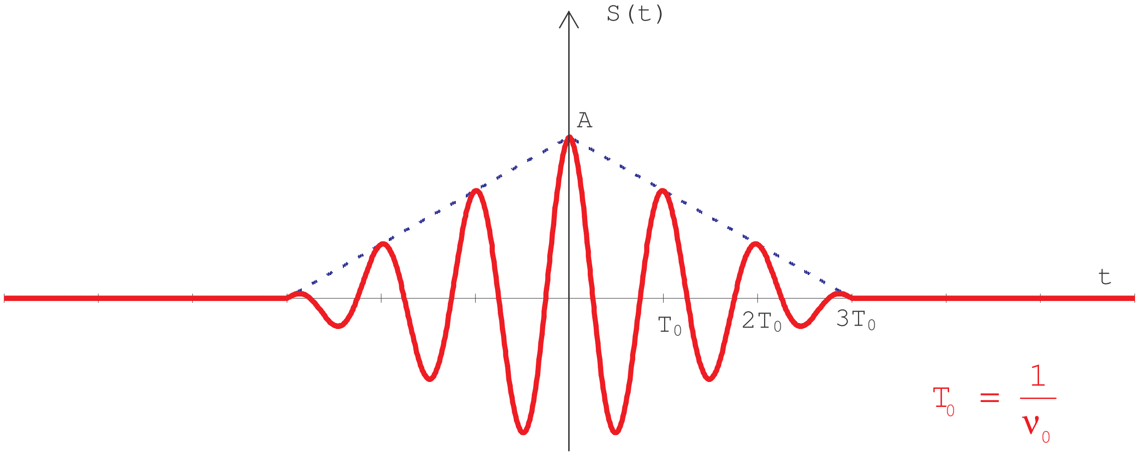
Cas n°3 :

Il n'est plus possible de reconstituer f(t).

EXERCICE 5 3

Considérons le signal $s(t) = f(t) \cdot g(t)$ constitué du signal sinusoïdal $f : t \to f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$ que l'on observe à travers une fenêtre triangulaire $g : t \to g(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t\nu_0}{3}\right)$.

1 **1)** Représenter graphiquement $s(t)$.



$$T_0 = \frac{1}{\nu_0}$$

1 **2)** Déterminer $S(\nu)$, la transformée de Fourier de $s(t)$.

$$S(\nu) = F(\nu) * G(\nu)$$

Or $F(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right)$ et $G(\nu) = \frac{3}{\nu_0}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3\nu}{\nu_0}\right)$

D'où $\boxed{S(\nu) = \frac{3A}{2\nu_0}\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3(\nu - \nu_0)}{\nu_0}\right) + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{3(\nu + \nu_0)}{\nu_0}\right)\right]}$

1 **3)** Représenter graphiquement $|S(\nu)|$