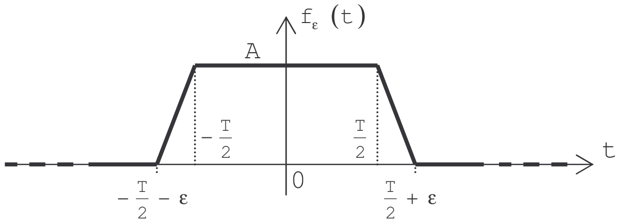
NOM :	**TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /22
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 6

Considérons le signal $f_\varepsilon(t)$ suivant :



1) Représenter graphiquement $f'_\varepsilon(t)$ la dérivée de $f_\varepsilon(t)$.

0,5

Déterminer l'expression littérale de $f'_\varepsilon(t)$.

1,5

Déterminer l'expression de $f'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[f'_\varepsilon(t) \right]$

1

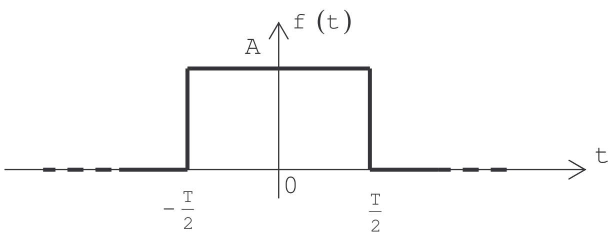
Représenter graphiquement $f'(t)$.

0,5

1,5 **2)** Déterminer $G(\nu)$ la transformé de Fourier de $f'(t)$.

3) En utilisant les questions précédentes retrouver $F(\nu)$, la transformée de Fourier de la fonction f(t) suivante :

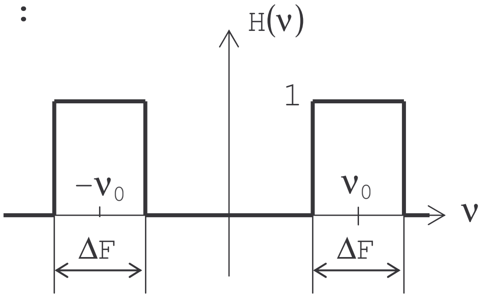
(Résultat bien connu)



1

EXERCICE 2 5

(Exercice extrait du polycopié de cours)
Considérons un système linéaire ayant un comportement de filtre passe-bande idéal dont la fonction de transfert a l'allure suivante :



Exprimer littéralement la fonction de transfert $H(\nu)$.

1

1) Déterminer la réponse impulsionnelle d'un tel système.

1,5

Représenter graphiquement cette réponse impulsionnelle.

1

Un tel système est-il réalisable comme filtre à variable temporelle ? Et comme filtre à variable d'espace ? (Justifier vos réponses)

1,5

EXERCICE 3 2

(Exercice extrait des annales d'examen SY53)
Considérons un système linéaire retardateur pur (qui ne déforme pas le signal, mais le retarde simplement).

1 **1)** Déterminer la fonction de transfert harmonique $H(\nu)$ d'un tel système.

1 **2)** Retrouver, en utilisant le résultat du **1)**, la réponse impulsionnelle h(t) d'un tel système (le résultat est d'ailleurs intuitivement connu)

EXERCICE 4 6

(Introduction à l'échantillonnage)

L'échantillonnage idéal (ou mathématique) consiste à multiplier la fonction à échantillonner par un peigne de dirac.

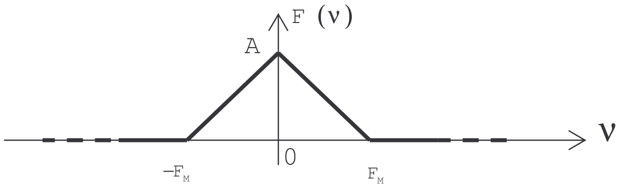
Considérons un signal f(t) que l'on échantillonne à l'aide d'un peigne de Dirac de période T_e.

1 **1)** Déterminer $f_e(t)$ l'expression du signal échantillonné (détailler l'expression).

2) Déterminer $F_e(\nu)$ l'expression de la transformée de Fourier du signal échantillonné $f_e(t)$.

1,5

Si on considère que $F(\nu)$ a l'allure suivante, représenter $F_e(\nu)$ dans les différents cas énoncés :



Cas n°1 : $F_e = \dfrac{1}{T_e} = 3F_M$

0,5

Cas n°2 : $F_e = \frac{1}{T_e} = 2F_M$

0,5

Cas n°3 : $F_e = \frac{1}{T_e} = F_M$

0,5

On souhaite reconstituer le signal d'origine f(t) à partir du signal échantillonné $f_e(t)$.

3) Est-il possible de reconstituer f(t) à partir de $f_e(t)$ dans chacun des trois cas décrits précédemment ? Expliquer votre réponse et donner la façon de procéder lorsque la reconstitution vous semble possible.

2

EXERCICE 5 3

Considérons le signal $s(t) = f(t) \cdot g(t)$ constitué du signal sinusoïdal $f : t \to f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$ que l'on observe à travers une fenêtre triangulaire $g : t \to g(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t\nu_0}{3}\right)$.

1 **1)** Représenter graphiquement s(t).

2) Déterminer $S(\nu)$, la transformée de Fourier de s(t).

1

1 Représenter graphiquement $|S(\nu)|$

FORMULAIRE

Convolution : $f * g : \quad t \to (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i{}^2) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et $\left(\frac{S}{B}\right)_{max\,dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) \right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$