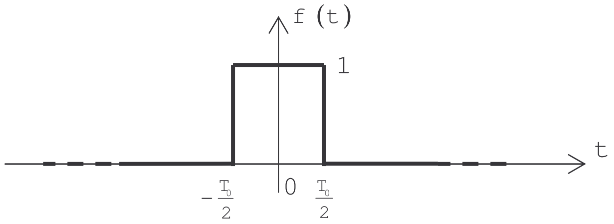
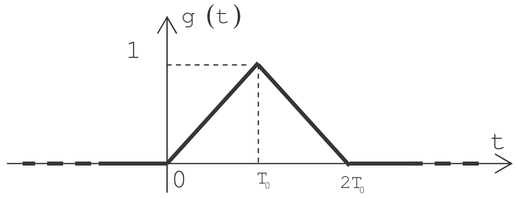
NOM :	TRAITEMENT DU SIGNAL **Correction**	Note : /21
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 7

Considérons les signaux f et g suivants :





1 **1)** Déterminer la Densité Spectrale d'Energie du signal f.

La DSE notée $S_{ff}(\nu) = F(\nu)F^*(\nu)$ or $f(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$

D'où $\begin{cases} F(\nu) = T_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu) \in \mathbb{R} \\ F^*(\nu) = F(\nu) \end{cases}$

$$\boxed{S_{ff}(\nu) = T_0^2\,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)}$$

2 **2)** Déterminer la Densité Spectrale d'Energie d'Interaction entre les signaux g et f.

La DSEI de g et f notée $S_{gf}(\nu) = G(\nu)F^*(\nu)$

or $g(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t - T_0}{T_0}\right)$ d'où $G(\nu) = T_0\,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)\,e^{-j2\pi\nu T_0}$

d'où $\boxed{S_{gf}(\nu) = T_0^2\,\mathrm{sinc}^3(T_0\nu)\,e^{-j2\pi\nu T_0}}$

3) En considérant que g(t) est le signal de sortie d'un Système Linéaire Invariant dans le Temps excité par le signal f(t), déterminer la fonction de transfert harmonique du système (on rappellera la formule qui lie la DSEI entre la sortie et l'entrée d'un SLIT et la DSE du signal d'entrée).

On rappelle que $S_{gf}(\nu) = G(\nu)F^*(\nu) = \underbrace{H(\nu)F(\nu)}_{G(\nu)}F^*(\nu)$

2 Donc $\boxed{S_{gf}(\nu) = H(\nu)S_{ff}(\nu)}$

D'où $\boxed{H(\nu) = \dfrac{S_{gf}(\nu)}{S_{ff}(\nu)} = \text{sinc}(T_0\nu)\,e^{-j2\pi\nu T_0}}$

En déduire la réponse impulsionnelle h(t) de ce système.

$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\nu))$

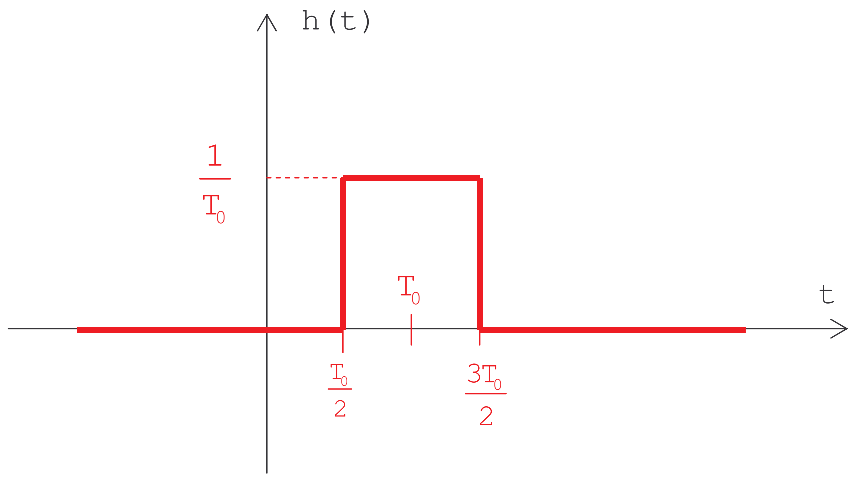
1,5

$$H(\nu) = \frac{1}{T_0}\,T_0\text{sinc}(T_0\nu)\,e^{-j2\pi\nu T_0}$$

D'où $\boxed{h(t) = \dfrac{1}{T_0}\,\text{rect}\left(\dfrac{t - T_0}{T_0}\right)}$

Représenter graphiquement h(t).

0,5



EXERCICE 2 4

(Exercice partiellement extrait du cours)

Considérons le signal qui a pour modélisation la fonction f suivante : $f : t \to f(t) = -A\cos\left(2\pi\nu_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$

1,5 **1)** Déterminer les coefficients de la série de Fourier complexe de f(t).

Etant périodique de période $1/\nu_0$, la fonction f(t) est décomposable en série de Fourier.

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j2\pi n\nu_0 t}$ or on peut décomposer le cosinus à l'aide des formules d'Euler

$$f(t) = -\frac{A}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\ e^{-j2\pi\nu_0 t} - \frac{A}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\ e^{j2\pi\nu_0 t}$$

D'où $$\boxed{\begin{cases}\alpha_{-1} = -\frac{A}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ \alpha_1 = -\frac{A}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}}\end{cases}}$$

2) En utilisant les coefficients calculés au **1)**, déterminer la puissance moyenne du signal f sur un nombre entier de périodes.

1 D'après le formulaire $\boxed{P_{moy} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{A^2}{2}}$

Vérifier ce résultat par une autre méthode.

Posons $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$ $\quad P_{moy} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f^2(t)dt = \frac{A^2}{T_0}\int_{T_0} \cos^2\left(2\pi\nu_0 t + \frac{\pi}{4}\right)dt$

1 $$P_{moy} = \frac{A^2}{2T_0}\int_{T_0}\left(1 + \cos\left(2\pi 2\nu_0 t + \frac{\pi}{4}\right)\right)dt$$

$$\boxed{P_{moy} = \frac{A^2}{2}}$$

En déduire la valeur efficace du signal f.

0,5 $$\boxed{f_{efficace} = \sqrt{P_{moy}} = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

EXERCICE 3 1,5

(Exercice extrait du cours)

Exprimer la série de Fourier complexe de $f(t-t_0)$ en fonction de celle de f(t).

Si f est une fonction périodique de période T, alors f peut s'écrire : $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$

1 d'où $f(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{j2\pi\frac{n}{T}(t-t_0)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{-j2\pi\frac{n}{T}t_0}e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$

$$\boxed{f(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\alpha_n e^{-j2\pi\frac{n}{T}t_0}\right)e^{j2\pi\frac{n}{T}t}}$$

En déduire la relation qui lie les coefficients de la série de Fourier de f(t) à ceux de $f(t-t_0)$.

$f(t-t_0)$ est également périodique de période T.

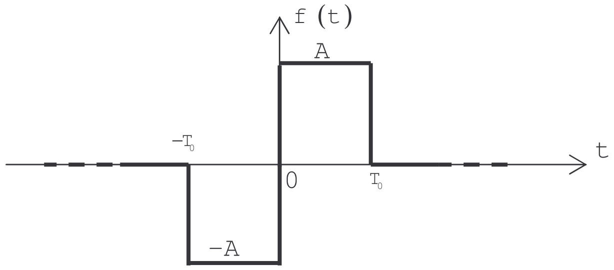
0,5 Donc $f(t-t_0)$ peut s'écrire : $f(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\beta_n e^{j2\pi\frac{n}{T}(t-t_0)}$

D'où $\boxed{\beta_n=\alpha_n e^{-j2\pi\frac{n}{T}t_0}}$

EXERCICE 4 2,5

(Exercice extrait des TD)

Considérons le signal f suivant :



1 **1)** Exprimer f(t) à l'aide des fonctions usuelles du cours.

$$\boxed{f(t)=-A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T_0}{2}}{T_0}\right)+A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_0}{2}}{T_0}\right)}$$

1,5 **2)** Déterminer $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f(t).

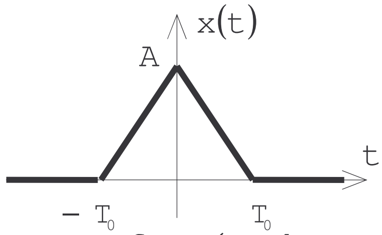
$F(\nu)=-Ae^{j2\pi\nu\frac{T_0}{2}}T_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)+Ae^{-j2\pi\nu\frac{T_0}{2}}T_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)$

$F(\nu)=-AT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\left(e^{j\pi\nu T_0}-e^{-j\pi\nu T_0}\right)$

$$\boxed{F(\nu)=-2jAT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\sin(\pi\nu T_0)}$$

EXERCICE 5 4

Considérons le signal réel élémentaire $x(t)$ suivant :



0,5 **1)** Calculer $X(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$

$$\boxed{X(\nu) = AT_0 \, \text{sinc}^2(T_0\nu)}$$

Considérons, maintenant, le signal $y(t)$ composé de la répétition périodique à la fréquence $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{f_0}{10} = \frac{1}{10\,T_0}$ du motif élémentaire $x(t)$.

1 **2)** Exprimer $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et d'une autre fonction $z(t)$ que l'on précisera.

$$\boxed{y(t) = x(t) * Ш_{T_1}(t)} \text{ où } Ш_{T_1}(t) = Ш_{10T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n10T_0)$$

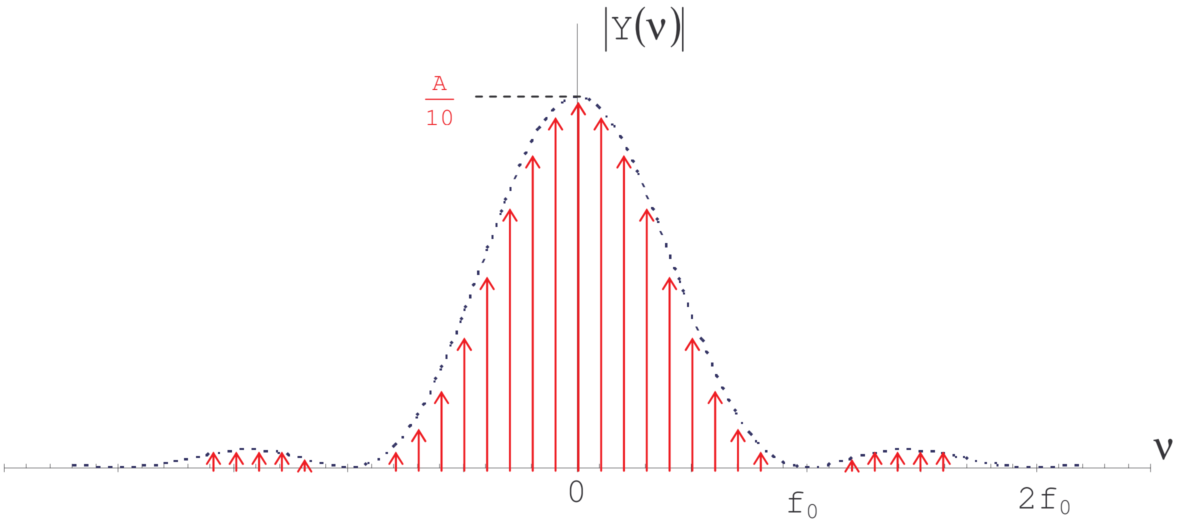
1,5 **3)** En déduire l'expression de $Y(\nu)$, la transformée de Fourier de $y(t)$ en fonction de $X(\nu)$ et de $Z(\nu)$.

$$y(t) = x(t) * Ш_{T_1}(t)$$

$$\text{D'où } Y(\nu) = X(\nu) \bullet \frac{1}{T_1} Ш_{\frac{1}{T_1}}(\nu) = \frac{1}{10T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{10T_0}\right) AT_0 \, \text{sinc}^2(T_0\nu)$$

$$\boxed{Y(\nu) = \frac{A}{10} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{10T_0}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{n}{10}\right)}$$

1 **4)** Représenter graphiquement $|Y(\nu)|$.



EXERCICE 6 2

Considérons un signal représenté par la fonction f(t) dont on connaît la transformée de Fourier $F(\nu)$.

Considérons la fonction g définie par : $g(t) = f(t)\cos(2\pi\nu_0 t)$

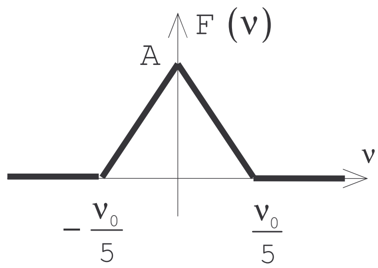
1) Exprimer $G(\nu)$, la transformée de Fourier de g(t) en fonction de $F(\nu)$.

1

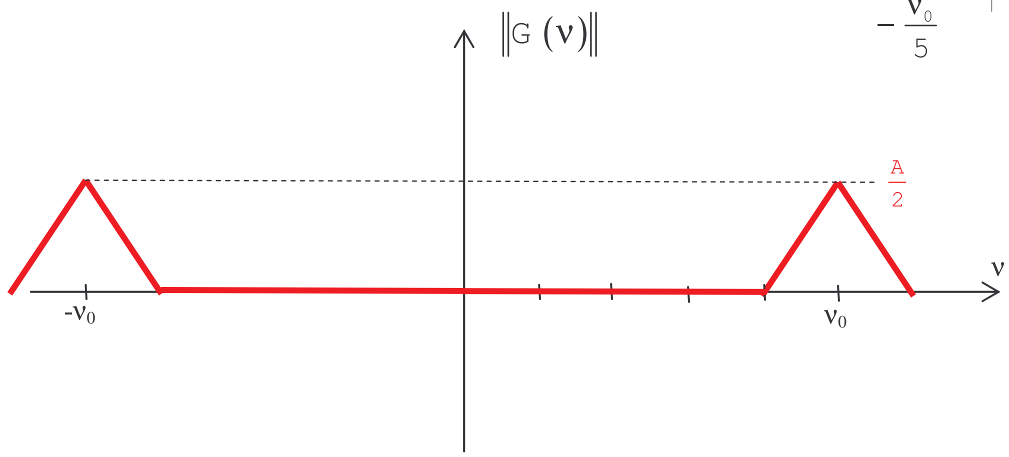
$$G(\nu) = F(\nu) * \frac{1}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)\right)$$

$$\boxed{G(\nu) = \frac{1}{2}F(\nu+\nu_0) + \frac{1}{2}F(\nu-\nu_0)}$$

2) Représenter graphiquement $\|G(\nu)\|$ en supposant que $F(\nu)$ a l'allure suivante : ->



1



FORMULAIRE

Convolution : $f*g$: $t \to (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^{\,2}) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$$

$$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$$

$$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$$

$$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$$

$$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$$

$$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\ dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\ dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\ dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$