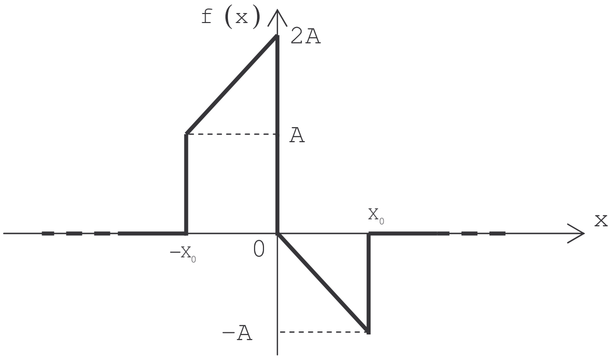
| NOM : | **Correction** <br> **TRAITEMENT DU SIGNAL** | Note : <br> /20 |
| --- | --- | --- |
| Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe. | | |

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

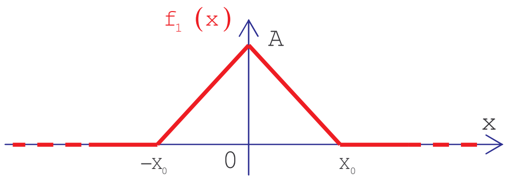
## *EXERCICE 1* 5

Considérons la fonction f de la variable x.

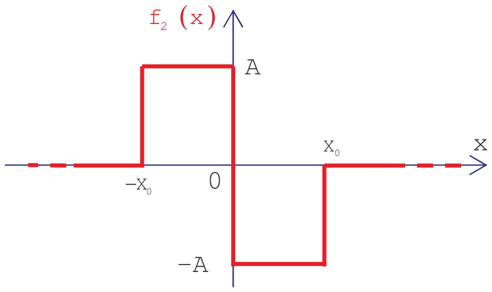



2 **1)** Décomposer f(x) en somme de fonctions usuelles dont on connaît les transformées de Fourier. Donner leur expression mathématique.

f(t) apparaît comme la somme des deux fonctions suivantes :




$$f_1(x) = A.\text{tri}\left(\frac{x}{X_0}\right)$$




$$f_2(x) = A.\text{rect}\left(\frac{x + \frac{X_0}{2}}{X_0}\right) - A.\text{rect}\left(\frac{x - \frac{X_0}{2}}{X_0}\right)$$

3

**2)** Déduire de la question précédente, la transformée de Fourier de la fonction f.

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ donc $F(\nu) = F_1(\nu) + F_2(\nu)$

Or $F_1(\nu) = AX_0 \operatorname{sinc}^2(X_0\nu)$

et $F_2(\nu) = AX_0 \operatorname{sinc}(X_0\nu)\, e^{j2\pi\nu\frac{X_0}{2}} - AX_0 \operatorname{sinc}(X_0\nu)\, e^{-j2\pi\nu\frac{X_0}{2}}$

d'où $F_2(\nu) = 2jAX_0 \operatorname{sinc}(X_0\nu)\left[\dfrac{e^{j\pi\nu X_0} - e^{-j\pi\nu X_0}}{2j}\right]$

enfin $F_2(\nu) = 2jAX_0 \operatorname{sinc}(X_0\nu)\sin(\pi\nu X_0)$

D'où $\boxed{F(\nu) = AX_0\left(\operatorname{sinc}^2(X_0\nu) + 2j\operatorname{sinc}(X_0\nu)\sin(\pi\nu X_0)\right)}$

## *EXERCICE 2* 2

(Exercice partiellement extrait du cours)

Considérons les signaux complexes périodiques de période T suivants :

$f_n(t) = \alpha_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}}$ et $f_m(t) = \alpha_m e^{j2\pi m\frac{t}{T}}$ où $\alpha_n$ et $\alpha_m$ sont des nombres complexes et n et m sont des entiers relatifs.

2

**1)** Déterminer la puissance moyenne d'interaction entre $f_n$ et $f_m$ sur une période T et en déduire sa valeur en fonction de n et m.

La puissance instantanée d'interaction vaut :

$$p_{f_nf_m}(t) = f_n(t)\, f_m^*(t) = \alpha_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}} \alpha_m^* e^{-j2\pi m\frac{t}{T}} = \alpha_n\alpha_m^* e^{j2\pi\frac{t}{T}(n-m)}$$

La puissance moyenne d'interaction sur une période T vaut donc :

$$P_{f_nf_m} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \alpha_n\alpha_m^* e^{j2\pi\frac{t}{T}(n-m)}dt = \frac{\alpha_n\alpha_m^*}{\cancel{T}}\left[\frac{e^{j2\pi\frac{t}{T}(n-m)}}{j2\pi\frac{(n-m)}{\cancel{T}}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

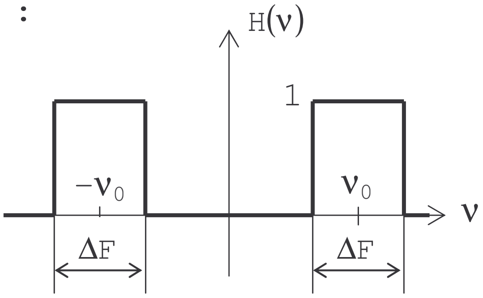
$$P_{f_nf_m} = \alpha_n\alpha_m^*\frac{e^{j\cancel{2}\pi\frac{\cancel{T}}{2\cancel{T}}(n-m)} - e^{-j\cancel{2}\pi\frac{\cancel{T}}{2\cancel{T}}(n-m)}}{j2\pi(n-m)} = \alpha_n\alpha_m^*\frac{\sin(\pi(n-m))}{\pi(n-m)}$$

D'où $\boxed{P_{f_nf_m} = \alpha_n\alpha_m^* \operatorname{sinc}(n-m) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \alpha_n\alpha_m^* = |\alpha_n|^2 \text{ si } n=m \end{cases}}$

## EXERCICE 3 5

(Exercice extrait des annales d'examen SY53)

Considérons un système linéaire ayant un comportement de filtre passe-bande idéal dont la fonction de transfert a l'allure suivante :




1 **1)** Exprimer littéralement la fonction de transfert $H(\nu)$.

$$H(\nu) = \mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta F}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \nu_0}{\Delta F}\right)$$

**2)** Déterminer la réponse impulsionnelle d'un tel système.

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

Grâce au théorème de similitude on obtient :

$$\Delta F \cdot \mathrm{sinc}(\Delta F t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{\Delta F}\right)$$

Puis en utilisant la réciproque du théorème du retard, on obtient :

1,5

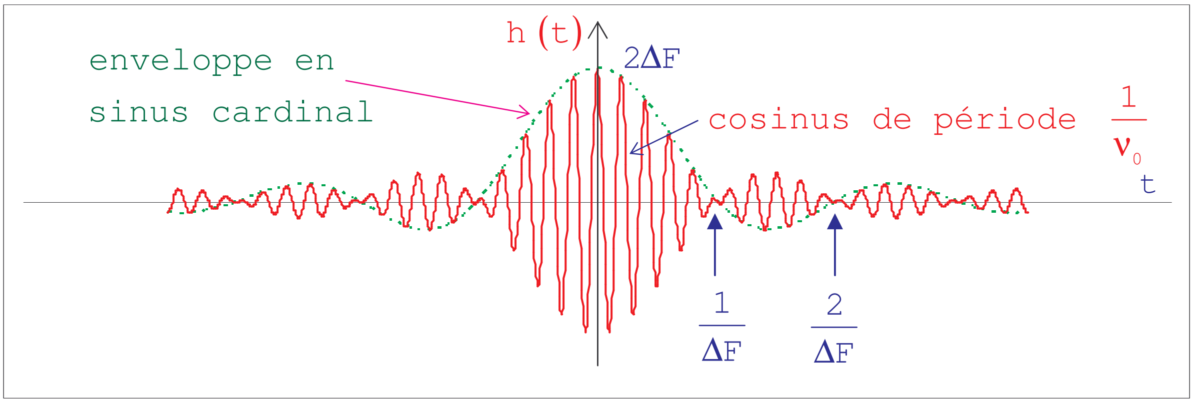
$$\begin{cases} \Delta F \cdot \mathrm{sinc}(\Delta F t)\, e^{j2\pi\nu_0 t} \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta F}\right) \\ \Delta F \cdot \mathrm{sinc}(\Delta F t)\, e^{-j2\pi\nu_0 t} \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \nu_0}{\Delta F}\right) \end{cases}$$

d'où $h(t) = \Delta F \cdot \left(e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}\right) \mathrm{sinc}(\Delta F t)$

Enfin $\boxed{h(t) = 2\Delta F \cdot \mathrm{sinc}(t\Delta F) \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)}$

Représenter graphiquement cette réponse impulsionnelle.

1



Un tel système est-il réalisable comme filtre à variable temporelle ? Et comme filtre à variable d'espace ? (Justifier vos réponses)

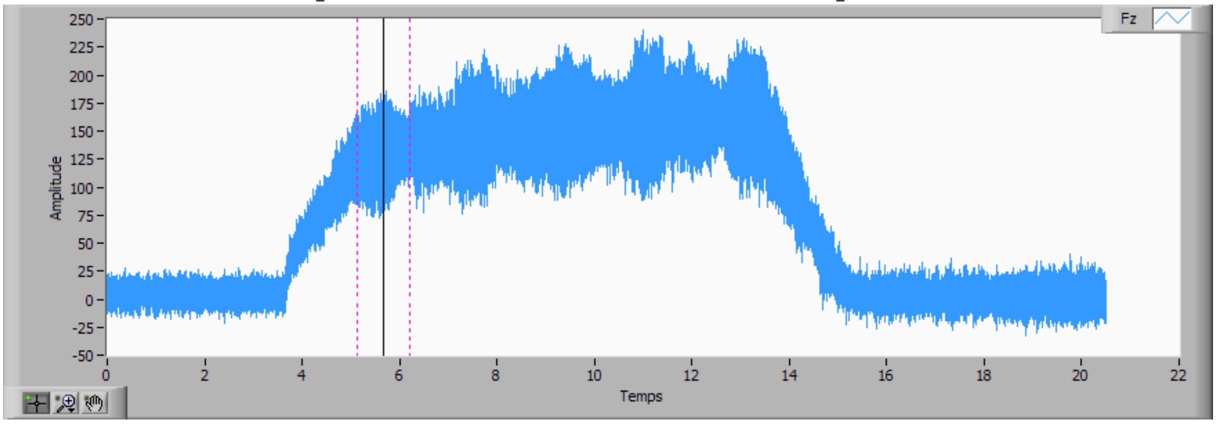
1,5

- Le système n'est pas réalisable en tant que système linéaire à variable temporelle car sa réponse impulsionnelle n'est pas causale.

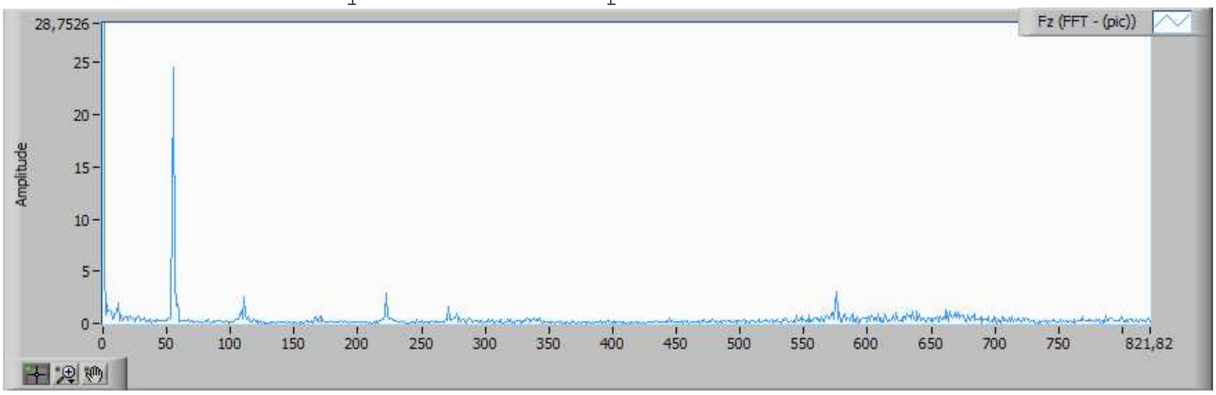
- En tant que système linéaire à variable d'espace, la causalité n'est plus un problème. Cependant, la réponse impulsionnelle n'étant pas à support borné, elle n'est pas physiquement réalisable. On peut cependant en obtenir une approximation en se limitant à quelques lobes.

## EXERCICE 4 4

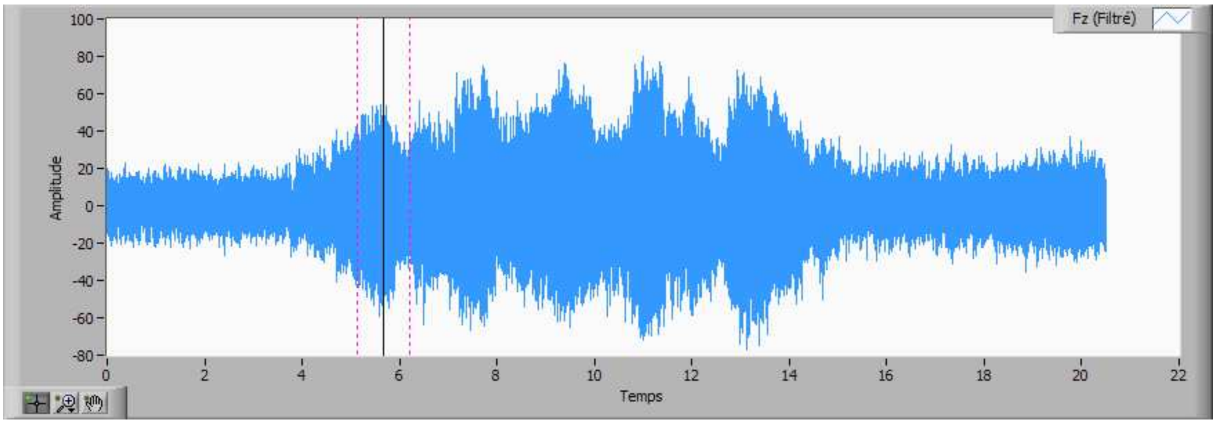
La figure suivante représente l'effort de coupe (effort de pénétration (axe Z)) d'un foret en carbure au cours du perçage d'un plaque en matériau composite de carbone. L'effort est exprimé en Newton et le temps en seconde.




La figure suivante représente le spectre de la tranche de signal située entre les deux curseurs pointillés du graphe d'effort. La fréquence est exprimée en Hertz.




Afin d'étudier uniquement les efforts vibratoires on décide d'éliminer par un traitement approprié l'effort moyen que l'on observe entre les secondes 4 et 14. La figure suivante représente le résultat du traitement.

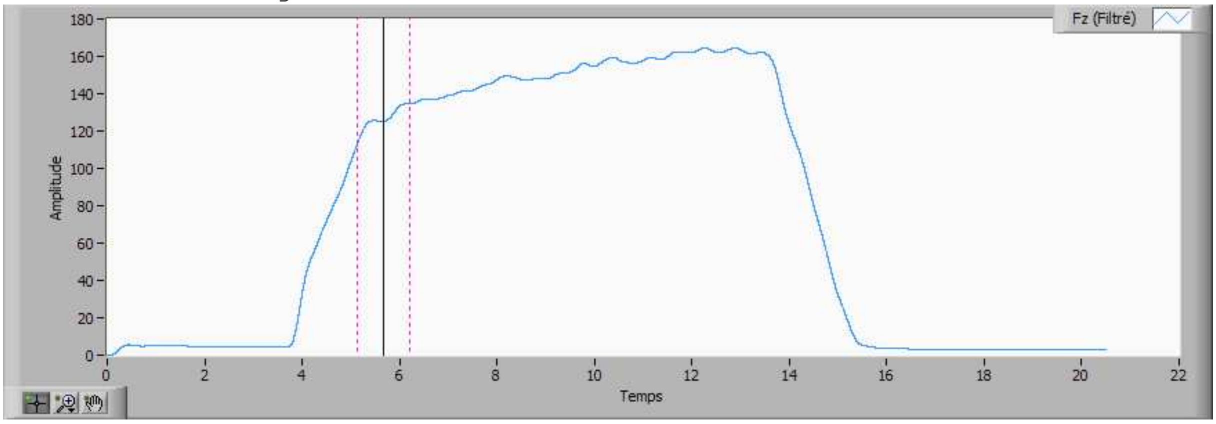



2 **1)** Décrire qualitativement et quantitativement le traitement effectué.

Il s'agit d'un filtrage fréquentiel de type passe-haut qui a éliminé la composante continue ainsi que les composantes de très basses fréquences responsables de la forme moyenne observable entre les secondes 4 et 14. La fréquence de coupure d'un tel filtre est vraisemblablement située en dessous de 50Hz de façon à préserver la raie spectrale de 52Hz. Une fréquence de coupure de quelques Hz est suffisante.

Ne sachant pas si les études après filtrage ont besoin de préserver le synchronisme initial des différentes composantes spectrales conservées, on choisira un filtre de type Bessel car son déphasage est assimilable à un retard pur identique pour toutes les fréquences de la bande passante.

Si on souhaite maintenant n'observer que l'effort moyen sans les vibrations, quel traitement doit-on faire pour obtenir la figure suivante.



2

Décrire qualitativement et quantitativement le traitement effectué.
Il s'agit d'un filtrage fréquentiel de type passe-bas qui a éliminé les composantes vibratoires de fréquences supérieures à 50Hz. On conserve ici la composante continue ainsi que les composantes de très basses fréquences responsables de la forme visible entre les secondes 4 et 14.

## *Questions de cours* 4

1,5

**1)** Si f(t) est un signal représentant une force en Newton en fonction du temps en seconde, déterminer l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

Ns ou N/Hz

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale d'énergie de f.

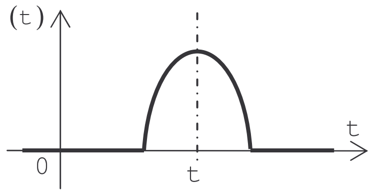
$N^2s^2$ ou $N^2/Hz^2$

E l'énergie totale du signal f.

$N^2s$ ou $N^2/Hz$

1,5

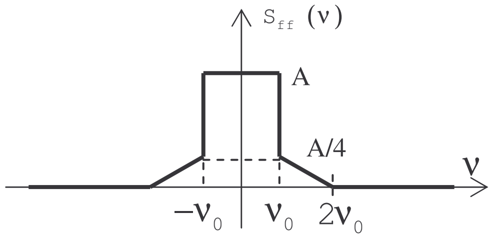
**2)** .Considérons un Système linéaire invariant par translation de sa variable ayant une réponse impulsionnelle causale présentant un axe de symétrie vertical.
Exemple :




Quelle particularité aura sa fonction de transfert ? (Expliquer)

h(t) apparaît comme une fonction paire f(t) retardée de $t_0$.
Donc la fonction de transfert $H(\nu)$ qui est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)=f(t-t_0)$, sera de la forme $H(\nu) = F(\nu)\, e^{-j2\pi\nu t_0}$ en raison de l'application du théorème du retard de la transformée de Fourier. On notera que $F(\nu)$ est réelle pure car f(t) est une fonction paire.
L'argument de $H(\nu)$ est donc égal à $\mathrm{Arg}\left(H(\nu)\right) = -2\pi\nu t_0$.
Le système induit donc un déphasage proportionnel à la fréquence. Son déphasage apparait alors comme un retard indépendant de la fréquence.
Ce système est dit « à phase linéaire ».

1 **3)** .Considérons un signal f(t) ayant pour densité spectrale d'énergie la fonction $S_{ff}(\nu)$ suivante :




Déterminer E, l'énergie du signal f dans la bande de fréquence $[-\nu_0; \nu_0]$

$$E = \int_{-\nu_0}^{+\nu_0} S_{ff}(\nu)\, d\nu = 2A\nu_0$$

# FORMULAIRE

Convolution : $f * g : \quad t \rightarrow (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Puissance instantanée d'interaction $\boxed{P_{xy}(t) = x(t) \cdot y^{*}(t)}$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^{*}(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_{T} x(t) y^{*}(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{T} f^{2}(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

**Signaux aléatoires :**

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^{\,2}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{T} (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\, dB} = 6{,}02.N + 1{,}76 \text{ dB}$$

**Décomposition en série de Fourier :**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) \right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

**Transformation de Fourier :**

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

**Quelques propriétés de la transformée de Fourier.**

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^{*}(t) \xrightarrow{TF} F^{*}(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

| $f(t)$ | $F(\nu)$ |
|---|---|
| réelle | Re(F) est paire<br>Im(F) est impaire |
| réelle et paire | réelle et paire |
| réelle et impaire | imaginaire et impaire |

**Quelques Transformées de Fourier.**

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\mathrm{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

**Signaux à énergie finie :**

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$  DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

**Signaux à énergie non finie :**

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T \to +\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T \to +\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

**Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie**

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

**Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie**

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

**Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires**

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

**Formules d'Euler.**

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

**Formules de trigonométrie.**

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$