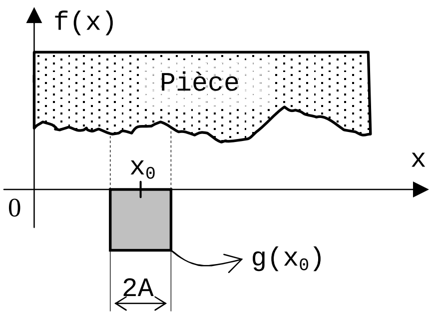
NOM :	Correction **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : 20,5/20
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 5,5

Considérons un capteur de profil dont le principe physique mesure la distance moyenne qui sépare sa fenêtre de mesure de la pièce dont on veut obtenir le profil.



$f(x)$ représente la distance entre la pièce et le capteur. $g(x_0)$ est le signal fourni par le capteur lorsqu'il est positionné en x_0. $g(x_0)$ représente alors la distance moyenne entre la pièce et la fenêtre de mesure de largeur 2A du capteur.

0,5 **1)** Exprimer la fonction $g(x_0)$.

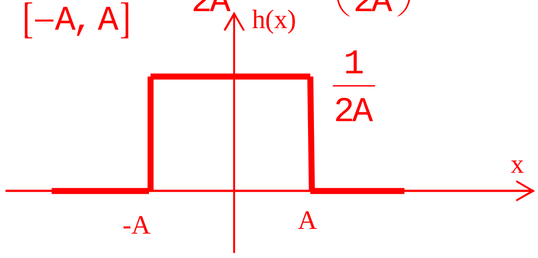
$g(x_0)$ est la distance moyenne entre la pièce et la fenêtre de mesure de largeur 2A.

$$\boxed{g(x_0) = \frac{1}{2A}\int_{x_0-A}^{x_0+A} f(x)dx}$$

1,5 **2)** Montrer que $g(x_0)$ peut s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $f(x)$ avec une fonction $h(x)$ que l'on déterminera.

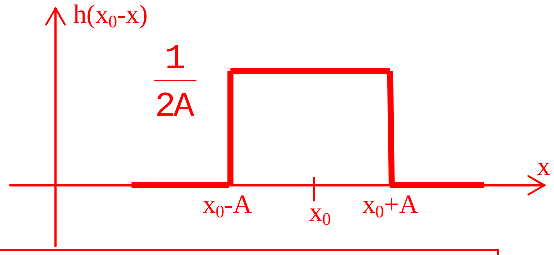
Considérons la fonction

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & \forall x \in [-A, A] \\ 0 & \forall x \notin [-A, A] \end{cases} = \frac{1}{2A}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2A}\right)$$



Calculons $(f * h)(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x_0 - x)\,dx$

or



d'où $\boxed{(f * h)(x_0) = \int_{x_0-A}^{x_0+A} f(x)\frac{1}{2A}\,dx = g(x_0)}$

3) Déduire de la question précédente que g peut être considéré comme la réponse d'un filtre au signal d'excitation f.

0,5 Comme g est le produit de convolution de f par h, on peut considérer que g est la réponse d'un Système Linéaire Invariant par Translation de réponse impulsionnelle h excité par le signal f.

Déterminer alors la fonction de transfert harmonique $T(\nu)$ de ce filtre.

1,5 La fonction de transfert $T(\nu) = H(\nu)$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle h(x).

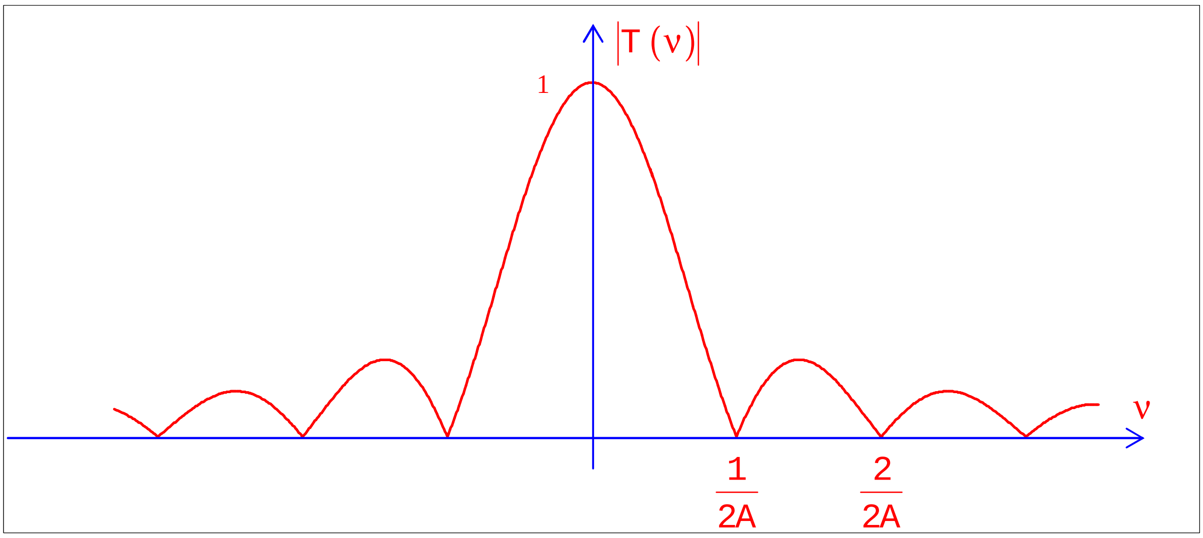
$$h(x) = \frac{1}{2A}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2A}\right) \quad \text{donc} \quad H(\nu) = \frac{1}{\cancel{2A}}\,\cancel{2A}\,\mathrm{sinc}(2A\nu)$$

$$\boxed{H(\nu) = \mathrm{sinc}(2A\nu)}$$

ν est une fréquence spatiale.

Représenter graphiquement le module de $T(\nu)$.

1

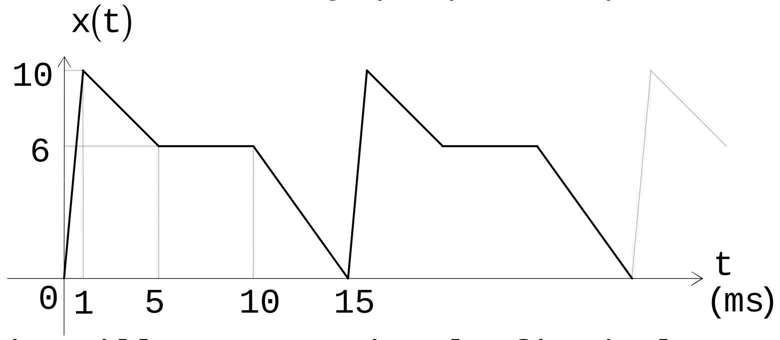


Y-a-t-il des fréquences spatiales pour lesquelles la fonction de transfert est nulle ? Expliquez l'impact que cela peut avoir sur la mesure du profil de la pièce.

0,5 La fonction de transfert est nulle pour toutes les fréquences spatiales multiples de $\frac{1}{2A}$. Si le profil de la pièce possède ces fréquences, elles ne seront ignorées.

EXERCICE 2 3

(Exercice extrait du polycopié de cours SY53)
Considérons le signal analogique périodique suivant:



On désire échantillonner ce signal afin de le traiter numériquement. La fréquence d'échantillonnage a été fixée empiriquement de façon à obtenir au moins 10 échantillons dans la partie la plus raide du signal.

1 **1)** Quelle est, dans ces conditions, la fréquence minimale d'échantillonnage ?

La partie la plus raide du motif dure 1ms. On souhaite acquérir 10 points dans cette partie. Il faut donc une période d'échantillonnage de $T_e = 0,1\text{ms}$.

La fréquence d'échantillonnage vaut donc $f_e = 10\text{kHz}$

Dans la pratique le concepteur de la carte a retenu la fréquence d'échantillonnage de $f_e = 25\text{KHz}$. Le CAN convertisseur échantillonneur analogique numérique a été précédé d'un filtre.

2) Quel est le rôle du filtre ?

C'est un filtre anti-repliement. (Explication : voir cours)

1

Quel doit être sa nature (Passe BAS, Passe Haut, Passe Bande, etc...) ?

0,5 Passe-bas

Si on suppose que ce filtre est parfait, comment doit-on choisir sa fréquence de coupure ?

0,5 Si le filtre est idéal (coupure infiniment raide), sa fréquence de coupure vaut $f_c = \frac{f_e}{2} = 12,5\text{ KHz}$

EXERCICE 3 4,5

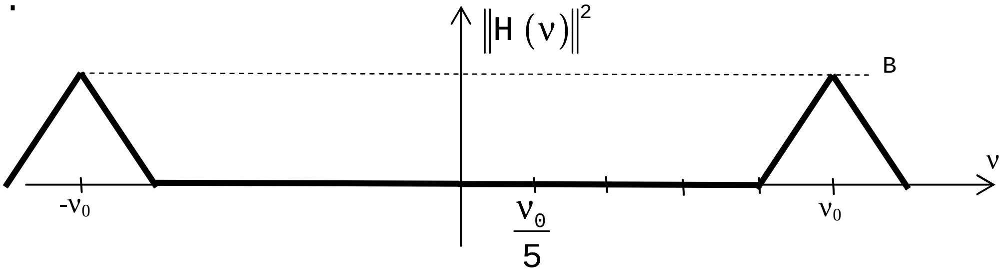
Considérons un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance A.

1 **1)** Déterminer sa fonction d'autocorrélation $C_{bb}(\tau)$

Selon le théorème de Wiener Khintchine, l'autocorrélation est la transformée inverse de Fourier de la densité spectrale de puissance. $C_{bb}(\tau) \xrightarrow{\text{Fourier}} DSP = A$

D'où $\boxed{C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)}$

Ce bruit blanc est ensuite filtré par un filtre dont le module carré de la fonction de transfert $H(\nu)$ a l'allure suivante :



2) Déterminer alors la fonction d'autocorrélation $C_{yy}(\tau)$ du signal y(t) en sortie du filtre.

On utilise la même méthode que pour le 1).

2,5 Il faut alors calculer la DSP en sortie de filtre.

$$S_{yy}(\nu) = Y(\nu)Y^*(\nu) = B(\nu)H(\nu)B^*(\nu)H^*(\nu)$$

$$S_{yy}(\nu) = S_{bb}(\nu)\|H(\nu)\|^2 = AB\left[\mathrm{tri}\left(5\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}\right) + \mathrm{tri}\left(5\frac{\nu+\nu_0}{\nu_0}\right)\right]$$

$$\mathrm{sinc}^2(\tau) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$AB\frac{\nu_0}{5}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu_0}{5}\tau\right) \xrightarrow{\text{Fourier}} AB\,\mathrm{tri}\left(\frac{5}{\nu_0}\nu\right)$$

$$AB\frac{\nu_0}{5}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu_0}{5}\tau\right)e^{j2\pi\nu_0\tau} \xrightarrow{\text{Fourier}} AB\,\mathrm{tri}\left(\frac{5}{\nu_0}(\nu-\nu_0)\right)$$

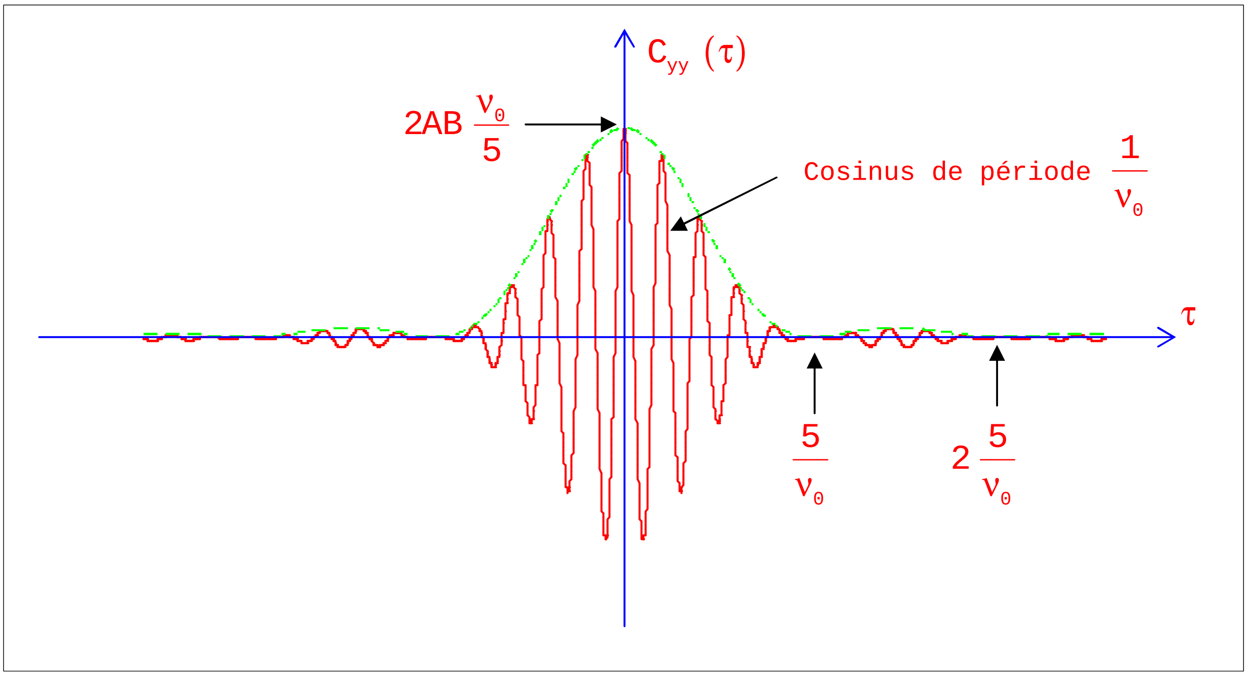
$$AB\frac{\nu_0}{5}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu_0}{5}\tau\right)e^{-j2\pi\nu_0\tau} \xrightarrow{\text{Fourier}} AB\,\mathrm{tri}\left(\frac{5}{\nu_0}(\nu+\nu_0)\right)$$ D'où

$$C_{yy}(\tau) = AB\frac{\nu_0}{5}\left(e^{j2\pi\nu_0\tau} + e^{-j2\pi\nu_0\tau}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu_0}{5}\tau\right) = 2AB\frac{\nu_0}{5}\cos(2\pi\nu_0\tau)\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu_0}{5}\tau\right)$$

$$\boxed{C_{yy}(\tau) = 2AB\frac{\nu_0}{5}\cos(2\pi\nu_0\tau)\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu_0}{5}\tau\right)}$$

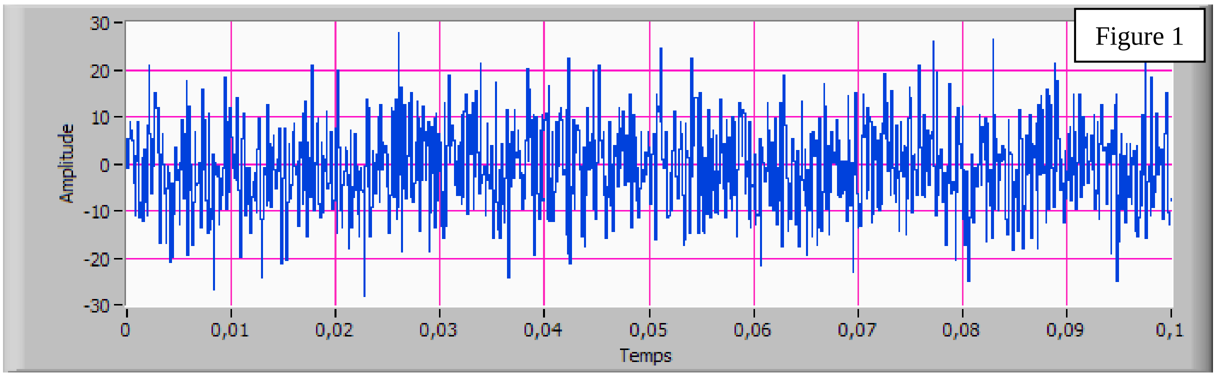
Représenter graphiquement $C_{yy}(\tau)$.

1

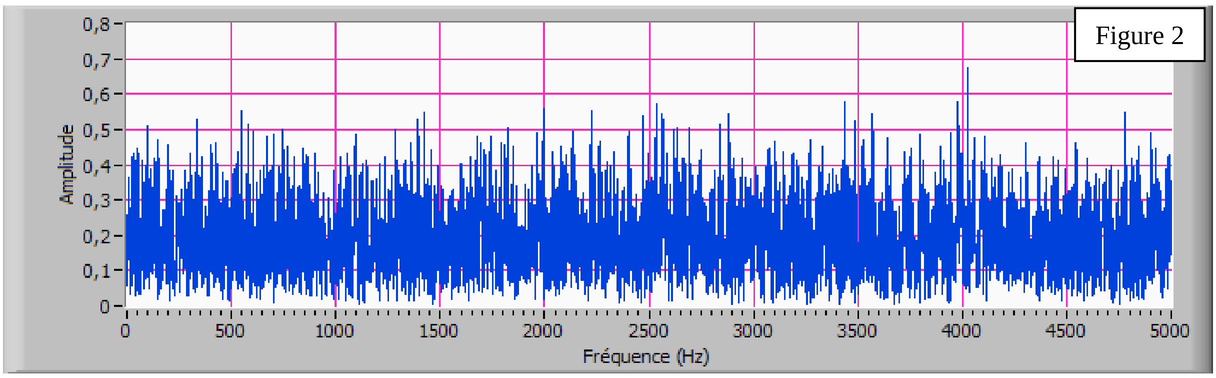


EXERCICE 4 3

Sur une machine nous avons relevé le signal suivant :



Une analyse spectrale d'amplitude fournit le spectre suivant :



Après quelques moyennes, le spectre devient :

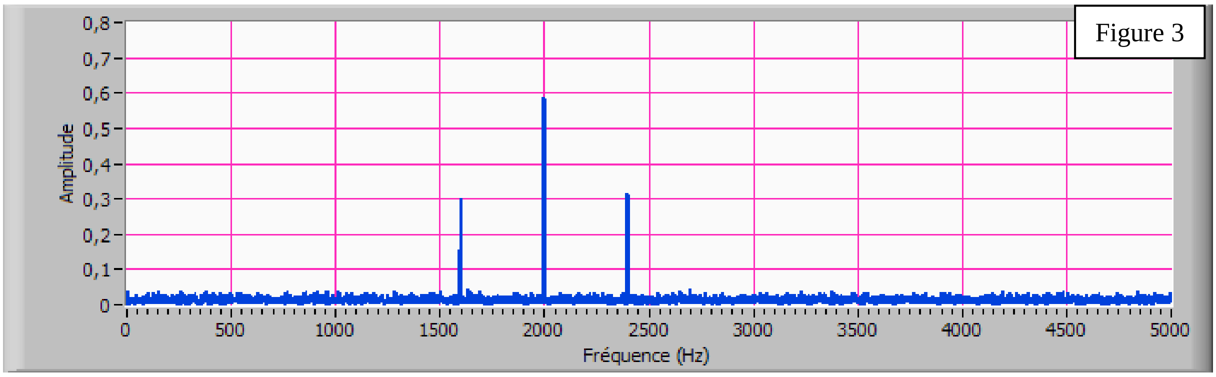


Figure 3

0,5 **1)** Commenter qualitativement le spectre de la figure 2.

La figure 2 nous montre un spectre aléatoire qui ressemble à celui d'un bruit blanc obtenu à partir d'une seule réalisation.

1 **2)** Commenter qualitativement le spectre de la figure 3 Pourquoi le fond de spectre (sans les 3 raies) est-il quasiment constant ?

La figure 3 confirme la présence d'un bruit blanc.
Après plusieurs réalisations, la moyenne des spectres nous montre un niveau de fond constant (bruit blanc). Les trois raies révèlent une porteuse modulée en amplitude par un signal sinusoïdal. Il s'agit d'une modulation d'amplitude dite classique avec porteuse pure.

1,5 **3)** Commenter qualitativement et quantitativement les trois raies spectrales visibles sur la figure 3. (Le spectre est un spectre unilatéral d'amplitude crête).

La porteuse de fréquence 2000Hz a une amplitude de A=0,6 tandis que le signal modulant de fréquence 400Hz a une amplitude de B=1.
En effet, sans le bruit blanc, le signal est de la forme :

$$f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t) + A\cos(2\pi\nu_0 t)\, B\cos(2\pi\nu_1 t)$$

Son spectre bilatéral sera de la forme :

$$F(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)\right) + \frac{AB}{4}\left(\delta(\nu+\nu_0+\nu_1) + \delta(\nu+\nu_0-\nu_1)\right)$$

$$+\frac{AB}{4}\left(\delta(\nu-\nu_0+\nu_1) + \delta(\nu-\nu_0-\nu_1)\right)$$

Dans un spectre unilatéral, on ne représente que la partie droite du spectre en doublant les amplitudes.
Dans une représentation unilatérale, la raie porteuse a donc une amplitude A et les bandes de modulation ont une amplitude AB/2.

Questions de Cours : 4,5

1) On désire détecter la présence d'un signal périodique de période inconnue, noyé dans un très important bruit blanc gaussien. Quelles méthodes simples proposez-vous ? Proposer deux méthodes. (Expliquez et justifiez)

1,5 Méthode 1 :

Soit $e_T(t)$ un signal périodique de période T inconnue.
Soit b(t) un bruit blanc gaussien de DSP constante A.
On souhaite vérifier la présence de e_T dans le signal x suivant : $x(t) = e_T(t) + b(t)$

On calcule l'autocorrélation de x :

$C_{xx}(\tau) = C_{e_Te_T}(\tau) + C_{e_Tb}(\tau) + C_{be_T}(\tau) + C_{bb}(\tau)$

$C_{e_Te_T}(\tau)$ est une fonction périodique de période T

$C_{e_Tb}(\tau)$ et $C_{be_T}(\tau)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 en moyenne.

$C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$

Si on effectue plusieurs réalisations moyennées, l'autocorrélation finale sera composée principalement des termes $C_{e_Te_T}(\tau)$ et $C_{bb}(\tau) = A\delta(\tau)$. Pour détecter la présence de e_T, il suffira d'examiner $C_{xx}(\tau)$ ailleurs qu'en 0 afin d'éviter le dirac.

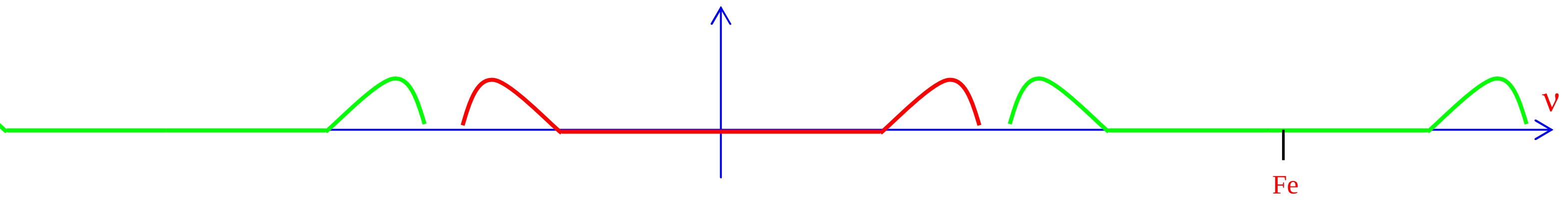
1,5 Méthode 2 :

En réalisant une moyenne de plusieurs analyses spectrales, on observera un fond de spectre quasi constant causé par le bruit blanc sur lequel on trouvera un spectre de raies harmoniques engendrées par le signal périodique. Si le signal périodique est sinusoïdal, on n'observera que les raies fondamentales.

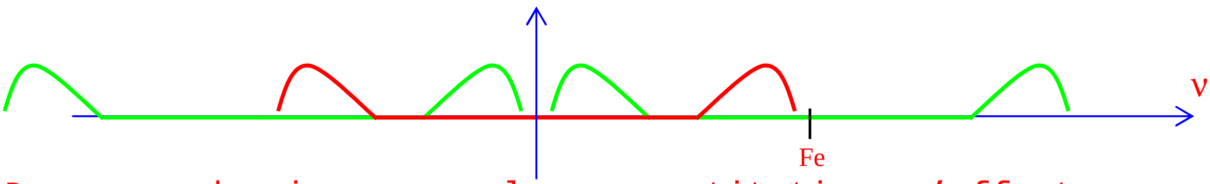
1,5 **2)** Expliquez quelles caractéristiques doit posséder un signal x(t) pour pouvoir être échantillonné correctement sans perte d’information **sans respecter** le théorème de Shannon.

Si le signal est à bande étroite, c'est-à-dire que son spectre n’occupe qu’une bande étroite éloignée de zéro, il est possible de ne pas respecter le théorème de Shannon sans pour autant perdre d’information. En effet, lors de l’échantillonnage, le spectre du signal échantillonné est constitué du spectre du signal d’origine répété tous les multiples de la fréquence d’échantillonnage. Si on ne respecte pas le théorème de Shannon, il y aura empiétement des spectres. Cependant si l’empiètement a lieu dans les parties vides du spectre du signal d’origine, le chevauchement ne sera pas destructeur d’information.

Shannon respecté



Shannon non respecté



Dans ce dernier cas, la reconstitution s’effectue par filtrage passe-bande.

FORMULAIRE

Convolution : $f*g$: $t \rightarrow (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,g(t-a)\,da$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\rightarrow+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T\rightarrow+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{Fourier} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{Fourier} 1$$

$$rect(t) \xrightarrow{Fourier} sinc(\nu)$$

$$tri(t) \xrightarrow{Fourier} sinc^2(\nu)$$

$$sinc(t) \xrightarrow{Fourier} rect(\nu)$$

$$sinc^2(t) \xrightarrow{Fourier} tri(\nu)$$

$$sgn(t) \xrightarrow{Fourier} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$ech(t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$ie1(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$ie2(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{Fourier} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$ig(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{Fourier} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{Fourier} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \underset{T \to +\infty}{Lim}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \underset{T \to +\infty}{Lim}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

et $C_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Dirac $\begin{cases} \forall t \neq 0 \quad \delta(t) = 0 \\ \delta(0) = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$