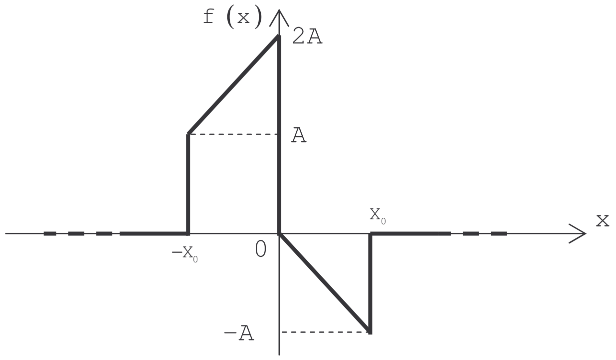
NOM :	**TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /20
Durée : 1H50. Calculatrice <u>non autorisée</u> car <u>inutile.</u> Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées <u>littéralement</u> avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 5

Considérons la fonction f de la variable x.



2 **1)** Décomposer f(x) en somme de fonctions usuelles dont on connaît les transformées de Fourier. Donner leur expression mathématique.

3 **2)** Déduire de la question précédente, la transformée de Fourier de la fonction f.

EXERCICE 2 2

(Exercice partiellement extrait du cours)

Considérons les signaux complexes périodiques de période T suivants :

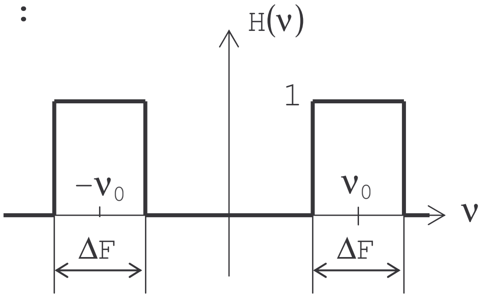
$f_n(t) = \alpha_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}}$ et $f_m(t) = \alpha_m e^{j2\pi m\frac{t}{T}}$ où α_n et α_m sont des nombres complexes et n et m sont des entiers relatifs.

2 **1)** Déterminer la puissance moyenne d'interaction entre f_n et f_m sur une période T et en déduire sa valeur en fonction de n et m.

EXERCICE 3 5

(Exercice extrait des annales d'examen SY53)

Considérons un système linéaire ayant un comportement de filtre passe-bande idéal dont la fonction de transfert a l'allure suivante :



1) Exprimer littéralement la fonction de transfert $H(\nu)$.

1

2) Déterminer la réponse impulsionnelle d'un tel système.

1,5

Représenter graphiquement cette réponse impulsionnelle.

1

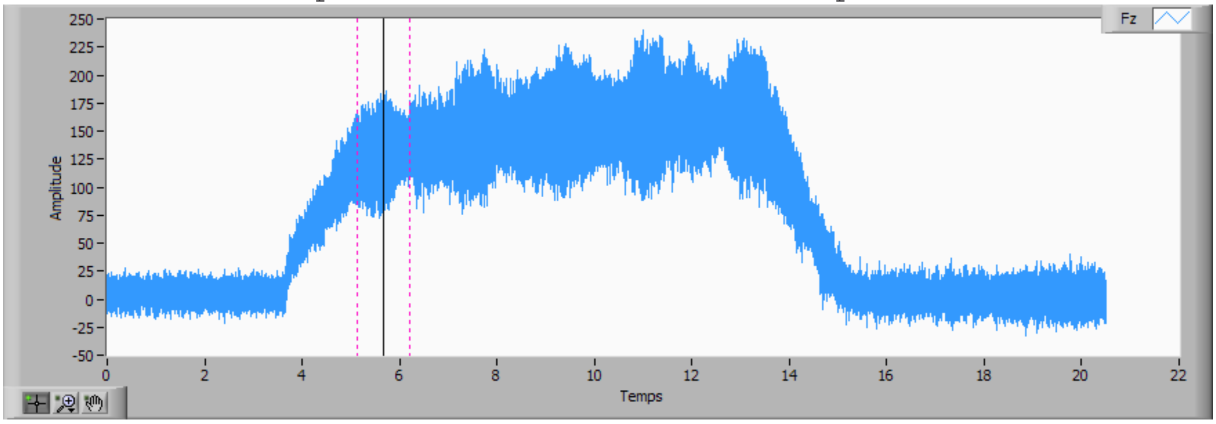
Un tel système est-il réalisable comme filtre à variable temporelle ? Et comme filtre à variable d'espace ? (Justifier vos réponses)

1,5

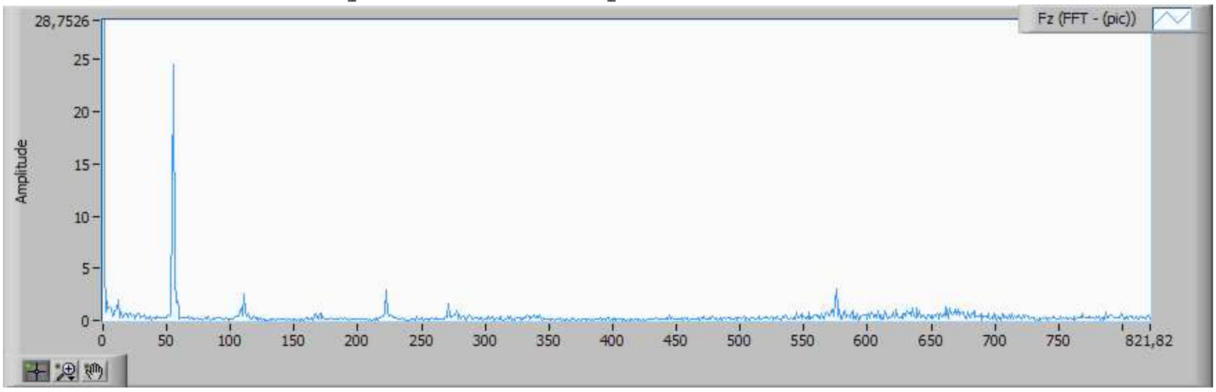
EXERCICE 4

4

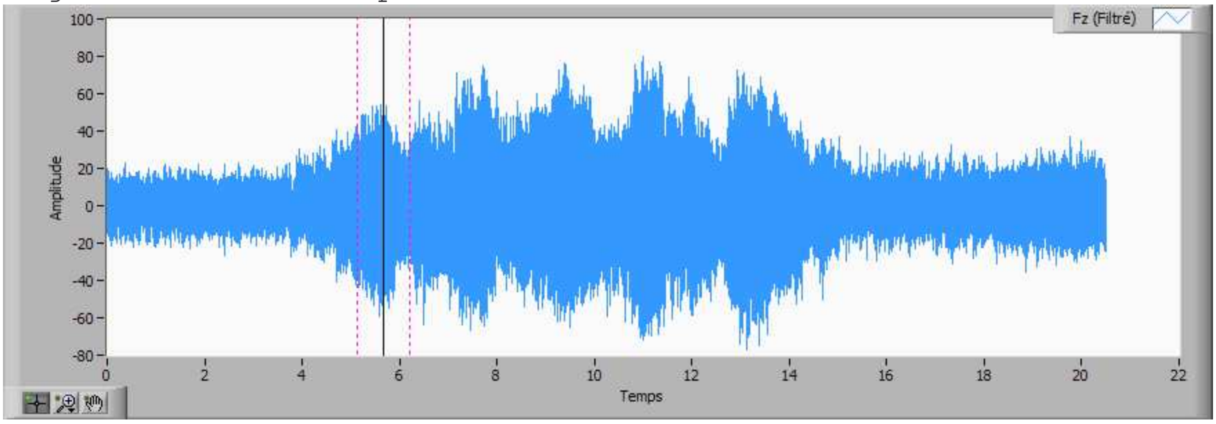
La figure suivante représente l'effort de coupe (effort de pénétration (axe Z)) d'un foret en carbure au cours du perçage d'un plaque en matériau composite de carbone. L'effort est exprimé en Newton et le temps en seconde.



La figure suivante représente le spectre de la tranche de signal située entre les deux curseurs pointillés du graphe d'effort. La fréquence est exprimée en Hertz.

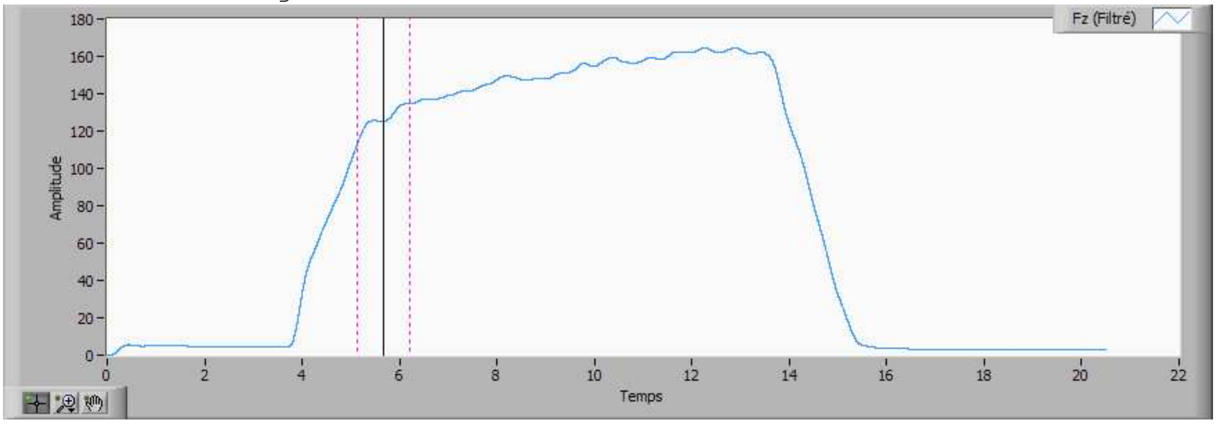


Afin d'étudier uniquement les efforts vibratoires on décide d'éliminer par un traitement approprié l'effort moyen que l'on observe entre les secondes 4 et 14. La figure suivante représente le résultat du traitement.



2 **1)** Décrire qualitativement et quantitativement le traitement effectué.

Si on souhaite maintenant n'observer que l'effort moyen sans les vibrations, quel traitement doit-on faire pour obtenir la figure suivante.



2 Décrire qualitativement et quantitativement le traitement effectué.

Questions de cours 4

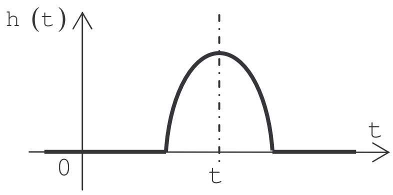
1,5 **1)** Si f(t) est un signal représentant une force en Newton en fonction du temps en seconde, déterminer l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale d'énergie de f.

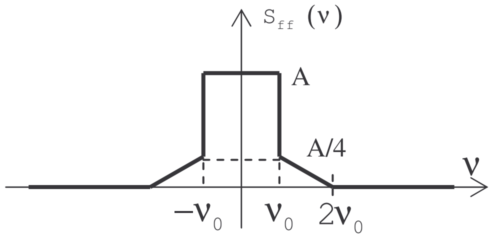
E l'énergie totale du signal f.

1,5 **2)** .Considérons un Système linéaire invariant par translation de sa variable ayant une réponse impulsionnelle causale présentant un axe de symétrie vertical.
Exemple :



Quelle particularité aura sa fonction de transfert ? (Expliquer)

1 **3)** .Considérons un signal f(t) ayant pour densité spectrale d'énergie la fonction $S_{ff}(\nu)$ suivante :



Déterminer E, l'énergie du signal f dans la bande de fréquence $[-\nu_0; \nu_0]$

FORMULAIRE

Convolution : $f * g$: $t \rightarrow (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Puissance instantanée d'interaction $\boxed{P_{xy}(t) = x(t) \cdot y^*(t)}$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^{\,2}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) \right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$$

$$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$$

$$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$$

$$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$$

$$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$$

$$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\text{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}(\nu)$$

$$\text{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}^2(\nu)$$

$$\text{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{rect}(\nu)$$

$$\text{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{tri}(\nu)$$

$$\text{sgn}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} -\frac{j}{\pi\nu}$$

$$\text{ech}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{j}{2\pi\nu}$$

$$\text{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\text{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\ dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\ dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau)\ dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t - \tau)] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$