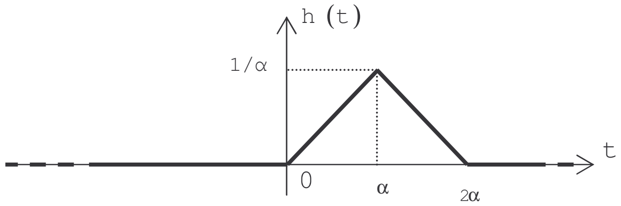
NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /21,5
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 6,5

(Exercice extrait des annales d'examen SY53)

Considérons un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) ayant pour réponse impulsionnelle la fonction h(t) suivante :



1) Déterminer la fonction de transfert de ce SLIT.

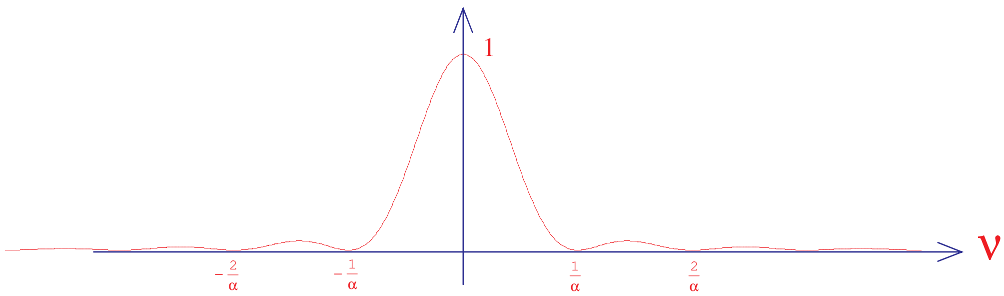
1,5 La fonction de transfert est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

$$h(t) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t-\alpha}{\alpha}\right) \quad \text{d'où} \quad H(\nu) = \cancel{\alpha}\,\frac{1}{\cancel{\alpha}}\,\mathrm{sinc}^2(\alpha\nu)\,e^{-j2\pi\nu\alpha}$$

$$\boxed{H(\nu) = \mathrm{sinc}^2(\alpha\nu)\,e^{-j2\pi\nu\alpha}}$$

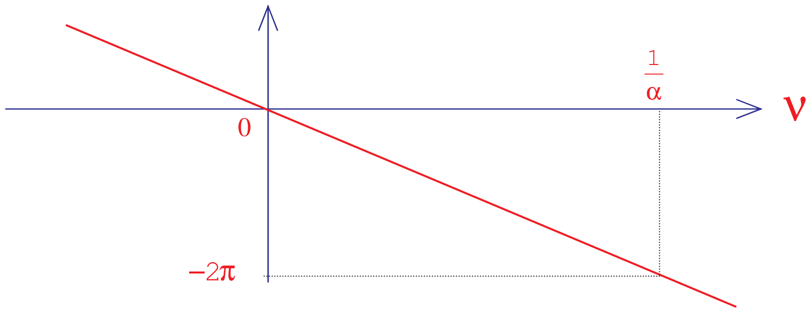
0,5 Représenter graphiquement le module de cette fonction de transfert.

$$|H(\nu)| = \mathrm{sinc}^2(\alpha\nu)$$



0,5 Représenter graphiquement l'argument de cette fonction de transfert.

$$\arg(H(\nu)) = -2\pi\nu\alpha$$



On applique à l'entrée de ce système linéaire le signal $e(t) = A + B\cos(2\pi\nu_0 t)$ où A et B sont deux constantes réelles positives.

2) Déterminer par deux méthodes différentes, la réponse s(t) du SLIT à ce signal d'excitation e(t).

Méthode 1 : (Raisonnement utilisant les propriétés des SLITs)

2 Le système étant linéaire, il conserve le caractère sinusoïdal de l'excitation et n'affecte éventuellement que l'amplitude et la phase en fonction de la fréquence de cette excitation. Dans notre cas, e(t) peut se décomposer en deux signaux e_1 et e_2 provoquant chacun les réponses s_1 et s_2.

- $e_1(t) = A = cte$ est un signal d'excitation de fréquence nulle. Pour $\nu = 0$, la fonction de transfert vaut $H(0) = \mathrm{sinc}^2(\alpha 0)\, e^{-j2\pi 0\alpha} = 1$ donc la réponse $s_1(t) = A$.
- $e_2(t) = B\cos(2\pi\nu_0 t)$. Pour $\nu = \nu_0$, la fonction de transfert vaut $H(\nu_0) = \mathrm{sinc}^2(\alpha\nu_0)\, e^{-j2\pi\nu_0\alpha}$. Le module de H affectera l'amplitude du cosinus et l'argument de H modifiera la phase du cosinus. $s_2(t) = B|H(\nu_0)|\cos(2\pi\nu_0 t + \arg(H(\nu_0)))$
  $s_2(t) = B\mathrm{sinc}^2(\alpha\nu_0)\cos(2\pi\nu_0 t - 2\pi\nu_0\alpha)$
  D'où $\boxed{s(t) = A + B\mathrm{sinc}^2(\alpha\nu_0)\cos(2\pi\nu_0(t-\alpha))}$

Méthode 2 : (En utilisant la fonction de transfert et la transformée de Fourier de e(t))

$E(\nu) = A\delta(\nu) + \frac{B}{2}\left[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right]$ d'où $S(\nu) = E(\nu)H(\nu)$

$$S(\nu) = \left[A\delta(\nu) + \frac{B}{2}\left[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right]\right]H(\nu)$$

2 $$S(\nu) = A\delta(\nu)H(\nu) + \frac{B}{2}\delta(\nu - \nu_0)H(\nu) + \frac{B}{2}\delta(\nu + \nu_0)H(\nu)$$

$$S(\nu) = A\delta(\nu)H(0) + \frac{B}{2}\delta(\nu - \nu_0)H(\nu_0) + \frac{B}{2}\delta(\nu + \nu_0)H(-\nu_0)$$

d'où $s(t) = AH(0) + \frac{B}{2}H(\nu_0)e^{j2\pi\nu_0 t} + \frac{B}{2}H(-\nu_0)e^{-j2\pi\nu_0 t}$

$$s(t) = A + \frac{B}{2}\operatorname{sinc}^2(\alpha\nu_0)e^{-j2\pi\nu_0\alpha}e^{j2\pi\nu_0 t} + \frac{B}{2}\operatorname{sinc}^2(-\alpha\nu_0)e^{j2\pi\nu_0\alpha}e^{-j2\pi\nu_0 t}$$

$$s(t) = A + B\operatorname{sinc}^2(\alpha\nu_0)\left[\frac{e^{-j2\pi\nu_0\alpha}e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{j2\pi\nu_0\alpha}e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2}\right]$$

$$\boxed{s(t) = A + B\operatorname{sinc}^2(\alpha\nu_0)\cos(2\pi\nu_0(t - \alpha))}$$

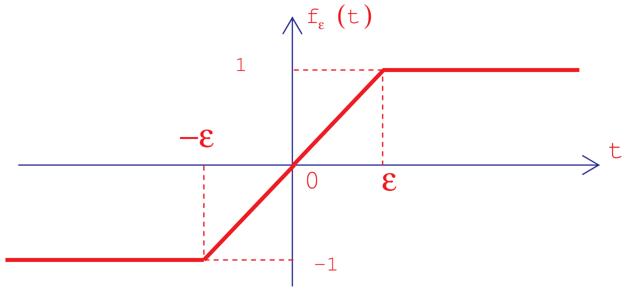
EXERCICE 2 3

(Exercice extrait du cours)

On rappelle la fonction signe : $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 \text{ pour } t < 0 \\ \ \ 0 \text{ pour } t = 0 \\ +1 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$

et la fonction échelon unité $\operatorname{ech}(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 0,5 \text{ pour } t = 0 \\ +1 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$

1 **1)** Exprimer la fonction sgn(t) comme la limite d'une fonction continue que l'on définira et que l'on représentera graphiquement.



$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)}$$

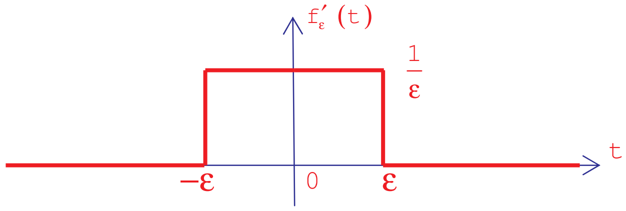
2 **2)** Déduire, de la question précédente, $X(\nu)$ la transformée de Fourier de sgn(t) ainsi que $Y(\nu)$ celle de l'échelon unitaire ech(t).

$X(\nu)$ s'obtient en calculant $F_\varepsilon(\nu)$: $X(\nu) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(\nu)$

$Y(\nu)$ se déduit de $X(\nu)$ car $\operatorname{ech}(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(t) + 1)$ donc

$$Y(\nu) = \frac{1}{2}\left(X(\nu) + \delta(\nu)\right)$$

Pour déterminer $F_\varepsilon(\nu)$ ou plus directement $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(\nu)$ on peut passer par la dérivée de $f_\varepsilon(t)$. En effet $f'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right)$



On notera que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f'_\varepsilon(t) = 2\delta(t)$ représente la dérivée de la fonction signe. D'où l'on déduit directement $G(\nu)$ la transformée de Fourier de $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f'_\varepsilon(t) = 2\delta(t)$: $G(\nu) = 2$

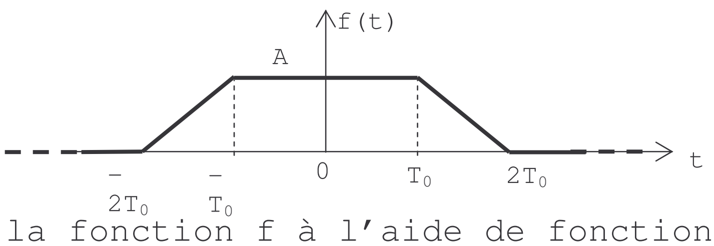
En utilisant le théorème de la dérivation on obtient :

$G(\nu) = 2 = j2\pi\nu\ X(\nu)$

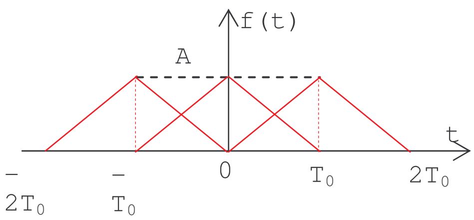
Et enfin $\boxed{X(\nu) = -\frac{j}{\pi\nu}}$ puis $\boxed{Y(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu) - \frac{j}{\pi\nu}\right)}$

EXERCICE 3 2,5

Considérons le signal f(t) qui a pour représentation graphique la courbe suivante :



1 **1)** Exprimer la fonction f à l'aide de fonctions triangle



f(t) peut s'exprimer de différentes façons :

$$\boxed{f(t) = A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t + T_0}{T_0}\right) + A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T_0}\right) + A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t - T_0}{T_0}\right)}$$

Ou

$$\boxed{f(t) = A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T_0}\right) * \left[\delta(t + T_0) + \delta(t) + \delta(t - T_0)\right]}$$

1,5 **2)** Déduire de la question précédente $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f.

En appliquant les différentes propriétés de la transformée de Fourier, on obtient :

$$\boxed{F(\nu) = AT_0\,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)\left[e^{j2\pi\nu T_0} + 1 + e^{-j2\pi\nu T_0}\right]}$$

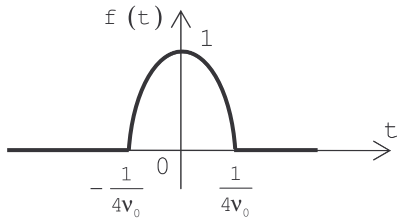
ou

$$\boxed{F(\nu) = AT_0\,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)\left[2\cos(2\pi\nu T_0) + 1\right]}$$

EXERCICE 4 6,5

Considérons la fonction f suivante:

$$f : t \to f(t) = \begin{cases} \cos(2\pi\nu_0 t) & \text{pour } t \in \left\{-\frac{1}{4\nu_0}, \frac{1}{4\nu_0}\right\} \\ 0 & \text{pour } t \notin \left\{-\frac{1}{4\nu_0}, \frac{1}{4\nu_0}\right\} \end{cases}$$



f est en fait constituée d'une seule arche positive d'une fonction cosinus.

0,5 **1)** Exprimer simplement la fonction f à l'aide de la fonction cosinus et d'une autre fonction que l'on précisera.

La fonction f peut être considérée comme une fonction cosinus observée au travers d'une porte rectangulaire de largeur $\frac{1}{2\nu_0}$.

$$\boxed{f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)\cdot \mathrm{rect}(2\nu_0 t)}$$

1,5 **2)** Déduire de la question précédente l'expression mathématique de la transformée de Fourier de f.

Posons $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$

$$F(\nu) = X(\nu) * \frac{1}{2\nu_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right) \quad \text{or} \quad X(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)\right)$$

D'où $\boxed{F(\nu) = \frac{1}{4\nu_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\nu+\nu_0}{2\nu_0}\right) + \frac{1}{4\nu_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\nu-\nu_0}{2\nu_0}\right)}$

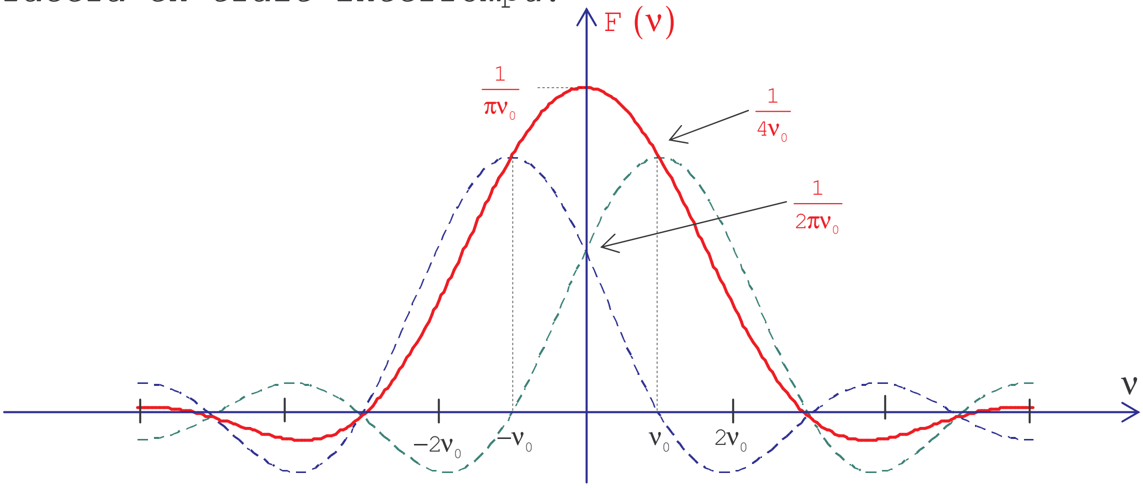
Calculer la valeur de $F(\nu)$ pour $\nu = 0$.

0,5 $F(0) = \frac{1}{4\nu_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4\nu_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2\nu_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)$

$F(0) = \frac{1}{2\nu_0}\,\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ d'où $\boxed{F(0) = \frac{1}{\pi\nu_0}}$

Représenter graphiquement la transformée de Fourier de f pour $\nu \in [-6\nu_0, 6\nu_0]$. Pour faciliter la représentation, on décomposera $F(\nu)$ en une somme de deux fonctions que l'on tracera en trait interrompu.

1



Considérons, maintenant, la fonction g réalisée en redressant la fonction $\cos(2\pi\nu_0 t)$ en double alternances (on réalise en fait la valeur absolue).

1 **3)** Exprimer simplement la fonction g à l'aide de la fonction f et d'une autre fonction que l'on précisera.

La fonction g peut être considérée comme étant la répétition périodique de la fonction f. On peut donc exprimer g sous la forme d'un produit de convolution de la fonction f avec un peigne de Dirac dont la période représente la périodicité de la répétition de f.

$$\boxed{g(t) = f(t) * Ш_{\frac{1}{2\nu_0}}(t)}$$

4) Déduire des questions précédentes l'expression mathématique de la transformée de Fourier de la fonction g en fonction de $F(\nu)$. 1

$G(\nu) = F(\nu) \cdot 2\nu_0 Ш_{2\nu_0}(\nu)$

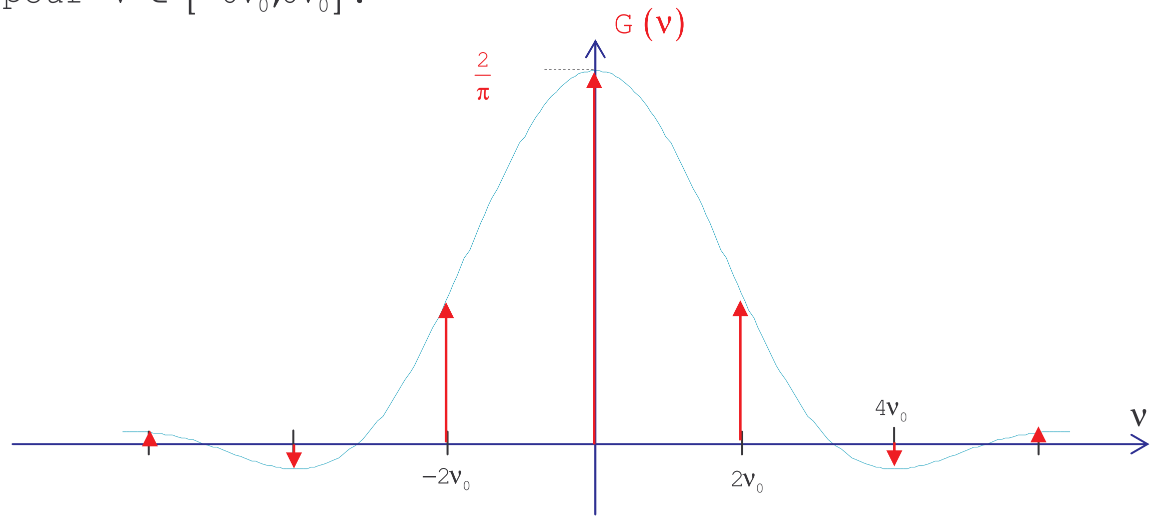
Ou

$$G(\nu) = 2\nu_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\nu)\,\delta(\nu - 2n\nu_0)$$

$$\text{Donc } \boxed{G(\nu) = 2\nu_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2n\nu_0)\,\delta(\nu - 2n\nu_0)}$$

Représenter graphiquement la transformée de Fourier de g pour $\nu \in [-6\nu_0, 6\nu_0]$.

1



Questions de cours 3

1,5 **1)** Si f(x) est un signal représentant une force en Newton en fonction d'une distance en mètre, déterminer l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

Nm

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale d'énergie de f.

N^2m^2

E l'énergie totale du signal f.

N^2m

1,5

2) .<u>En utilisant</u> la transformée de Fourier de la fonction $f : t \to f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$, déterminer la transformée de Fourier de $g : t \to g(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)$

La fonction g peut être considérée comme la fonction f décalée d'un quart de période.

$$g(t) = f\left(t - \frac{1}{4\nu_0}\right)$$

D'où $G(\nu) = F(\nu)\, e^{-j2\pi\nu\frac{1}{4\nu_0}} = F(\nu)\, e^{-j\frac{\pi\nu}{2\nu_0}}$

$$G(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)\right) e^{-j\frac{\pi\nu}{2\nu_0}}$$

$$G(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0)\, e^{j\frac{\pi\nu_0}{2\nu_0}} + \delta(\nu-\nu_0)\, e^{-j\frac{\pi\nu_0}{2\nu_0}}\right)$$

$$G(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0)\, e^{j\frac{\pi}{2}} + \delta(\nu-\nu_0)\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

D'où $\boxed{G(\nu) = \frac{j}{2}\delta(\nu+\nu_0) - \frac{j}{2}\delta(\nu-\nu_0)}$

FORMULAIRE

Convolution : $f * g$: $t \to (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Puissance instantanée d'interaction $\boxed{P_{xy}(t) = x(t) \cdot y^*(t)}$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et $\left(\frac{S}{B}\right)_{max\ dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) \right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\text{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}(\nu)$$

$$\text{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}^2(\nu)$$

$$\text{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{rect}(\nu)$$

$$\text{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{tri}(\nu)$$

$$\text{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\text{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$