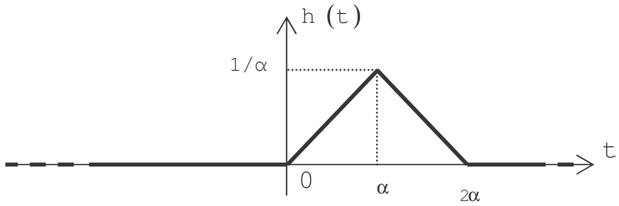
NOM :	**TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /21,5
Durée : 1H50. Calculatrice <u>non autorisée</u> car <u>inutile.</u> Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées <u>littéralement</u> avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 6,5

(Exercice extrait des annales d'examen SY53)

Considérons un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) ayant pour réponse impulsionnelle la fonction h(t) suivante :



1,5 **1)** Déterminer la fonction de transfert de ce SLIT.

0,5 Représenter graphiquement le module de cette fonction de transfert.

0,5 Représenter graphiquement l'argument de cette fonction de transfert.

On applique à l'entrée de ce système linéaire le signal $e(t) = A + B\cos(2\pi\nu_0 t)$ où A et B sont deux constantes réelles positives.

2 **2)** Déterminer par deux méthodes différentes, la réponse s(t) du SLIT à ce signal d'excitation e(t).
Méthode 1 : (Raisonnement utilisant les propriétés des SLITs)

2 Méthode 2 : (En utilisant la fonction de transfert et la transformée de Fourier de e(t))

EXERCICE 2 3

(Exercice extrait du cours)

On rappelle la fonction signe : $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 \text{ pour } t < 0 \\ \ \ 0 \text{ pour } t = 0 \\ +1 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$

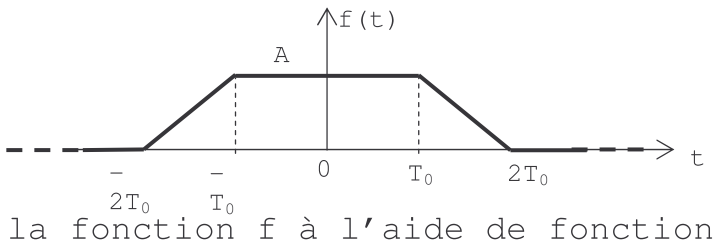
et la fonction échelon unité $\operatorname{ech}(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 0,5 \text{ pour } t = 0 \\ +1 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$

1 **1)** Exprimer la fonction sgn(t) comme la limite d'une fonction continue que l'on définira et que l'on représentera graphiquement.

2 **2)** Déduire, de la question précédente, $X(\nu)$ la transformée de Fourier de sgn(t) ainsi que $Y(\nu)$ celle de l'échelon unitaire ech(t).

EXERCICE 3 2,5

Considérons le signal f(t) qui a pour représentation graphique la courbe suivante :

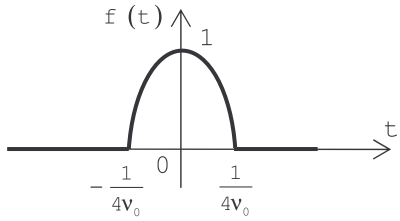


1 **1)** Exprimer la fonction f à l'aide de fonctions triangle

1,5 **2)** Déduire de la question précédente $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f.

EXERCICE 4 6,5

Considérons la fonction f suivante:



$$f : t \to f(t) = \begin{cases} \cos(2\pi\nu_0 t) & \text{pour } t \in \left\{-\frac{1}{4\nu_0}, \frac{1}{4\nu_0}\right\} \\ 0 & \text{pour } t \notin \left\{-\frac{1}{4\nu_0}, \frac{1}{4\nu_0}\right\} \end{cases}$$

f est en fait constituée d'une seule arche positive d'une fonction cosinus.

0,5 **1)** Exprimer simplement la fonction f à l'aide de la fonction cosinus et d'une autre fonction que l'on précisera.

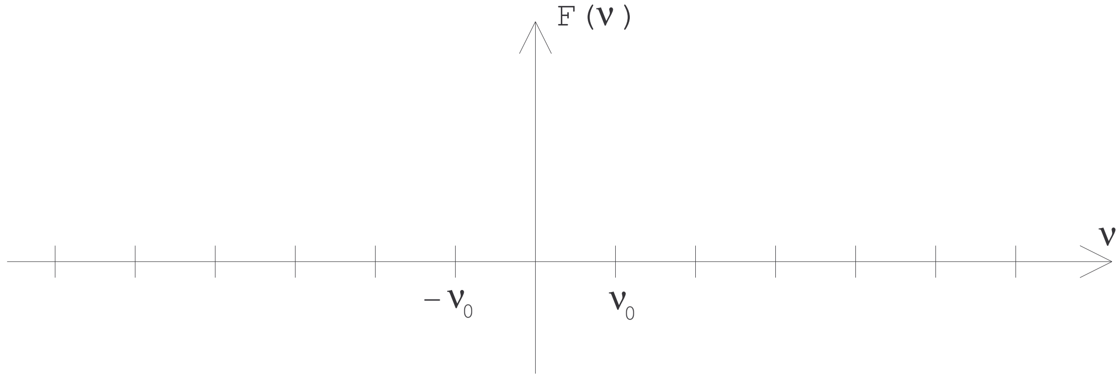
2) Déduire de la question précédente l'expression mathématique de la transformée de Fourier de f.

2

Calculer la valeur de $F(\nu)$ pour $\nu = 0$.

Représenter graphiquement la transformée de Fourier de f pour $\nu \in [-6\nu_0, 6\nu_0]$. Pour faciliter la représentation, on décomposera $F(\nu)$ en une somme de deux fonctions que l'on tracera en trait interrompu.

1



Considérons, maintenant, la fonction g réalisée en redressant la fonction $\cos(2\pi\nu_0 t)$ en double alternances (on réalise en fait la valeur absolue).

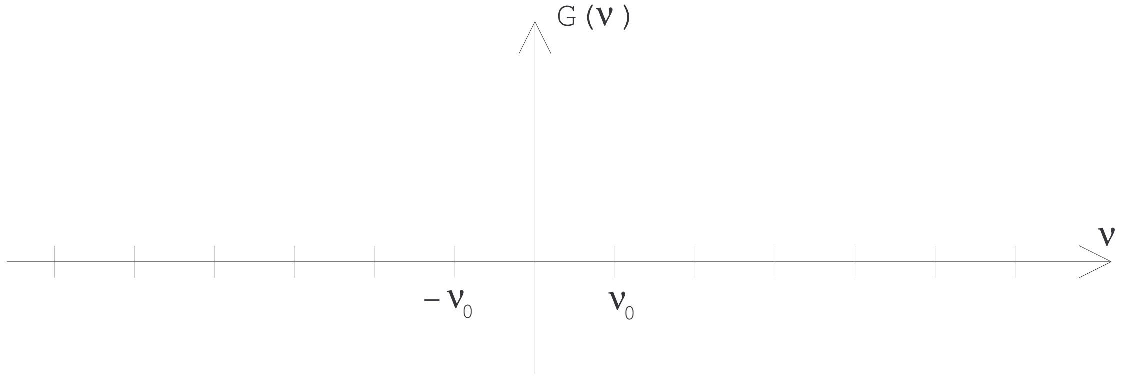
1 **3)** Exprimer simplement la fonction g à l'aide de la fonction f et d'une autre fonction que l'on précisera.

4) Déduire des questions précédentes l'expression mathématique de la transformée de Fourier de la fonction g en fonction de $F(\nu)$.

1

Représenter graphiquement la transformée de Fourier de g pour $\nu \in [-6\nu_0, 6\nu_0]$.

1



Questions de cours 3

1,5 **1)** Si f(x) est un signal représentant une force en Newton en fonction d'une distance en mètre, déterminer l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale d'énergie de f.

E l'énergie totale du signal f.

1,5 **2)** .<u>En utilisant</u> la transformée de Fourier de la fonction $f : t \to f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$, déterminer la transformée de Fourier de $g : t \to g(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)$

FORMULAIRE

Convolution : $f*g$: $t \rightarrow (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Puissance instantanée d'interaction $\boxed{P_{xy}(t) = x(t) \cdot y^*(t)}$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\, dB} = 6{,}02.N + 1{,}76 \text{ dB}$$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$$

$$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$$

$$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$$

$$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$$

$$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$$

$$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n\, F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$