NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /20,5
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

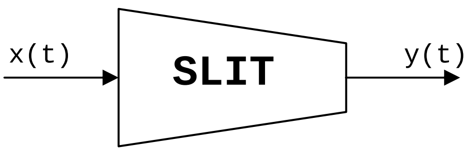
Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 6,5

Considérons les deux fonctions complexes $F_1(\nu)$ et $F_2(\nu)$ définies de la façon suivante :

$F_1 : \nu \to F_1(\nu) = A^2 \mathrm{sinc}^2(\nu T_\theta)$ et $F_2 : \nu \to F_2(\nu) = A^2 \mathrm{sinc}^2(\nu T_\theta)\, e^{-j2\pi\nu\theta}$

Considérons un SLIT (Système Linéaire Invariant par Translation de sa variable) ayant pour fonction de transfert harmonique la fonction $H(\nu)$.



Considérons y(t) la réponse du SLIT à l'excitation x(t).

On considère que $F_1(\nu)$ est la DSE (densité Spectrale d'Energie) du signal x(t) et que $F_2(\nu)$ est la DSEI (Densité Spectrale d'Energie d'Interaction) entre y(t) et x(t).

1) Déterminer une expression mathématique de x(t).

$F_1(\nu)$ étant la DSE de x(t), $F_1(\nu) = X(\nu)X^*(\nu) = |X(\nu)|^2$. Comme
1 $F_1(\nu)$ est un module carré, il existe une infinité de fonction $X(\nu)$ qui ont même module carré.
On choisira par exemple : $\boxed{X(\nu) = A\,\mathrm{sinc}(\nu T_\theta)}$ d'où l'obtention de x(t) par transformée inverse de Fourier.

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{T_\theta}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_\theta}\right)}$$

En déduire l'expression de y(t) correspondante.

$F_2(\nu)$ étant la DSEI entre y(t) et x(t), $F_2(\nu) = Y(\nu)\,X^*(\nu)$.

1,5 Si $X(\nu) = A\,\mathrm{sinc}(\nu T_0)$, alors $X^*(\nu) = A\,\mathrm{sinc}(\nu T_0)$ car $X(\nu) \in \mathbb{R}$

On en déduit $Y(\nu) = \dfrac{F_2(\nu)}{X^*(\nu)} = \dfrac{A^{\cancel{2}}\mathrm{sinc}^{\cancel{2}}(\nu T_0)\,e^{-j2\pi\nu\theta}}{\cancel{A\,\mathrm{sinc}(\nu T_0)}} = A\,\mathrm{sinc}(\nu T_0)\,e^{-j2\pi\nu\theta}$

$$\boxed{Y(\nu) = A\,\mathrm{sinc}(\nu T_0)\,e^{-j2\pi\nu\theta}}$$

Puis par transformée inverse :

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{T_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\theta}{T_0}\right)}$$

2) Rappeler et démontrer la relation qui lie la DSEI entre la sortie et l'entrée d'un SLIT avec la DSE à l'entrée de ce même SLIT.

1 Si x(t) est l'entrée du SLIT et y(t) la sortie correspondante, $S_{yx}(\nu) = Y(\nu)\,X^*(\nu) = H(\nu)\,X(\nu)\,X^*(\nu)$

Or $X(\nu)\,X^*(\nu) = S_{xx}(\nu)$ d'où $\boxed{S_{yx}(\nu) = H(\nu)\,S_{xx}(\nu)}$

1,5 En déduire l'expression mathématique de la fonction de transfert $H(\nu)$ du SLIT. On déterminera $H(\nu)$, $|H(\nu)|$ et $\arg(H(\nu))$.

En utilisant $S_{yx}(\nu) = H(\nu)\,S_{xx}(\nu)$, on trouve :

$$H(\nu) = \frac{S_{yx}(\nu)}{S_{xx}(\nu)} = \frac{F_2(\nu)}{F_1(\nu)} = \frac{\cancel{A^2\mathrm{sinc}^2(\nu T_0)}\,e^{-j2\pi\nu\theta}}{\cancel{A^2\mathrm{sinc}^2(\nu T_0)}} = e^{-j2\pi\nu\theta}$$

$$\boxed{H(\nu) = e^{-j2\pi\nu\theta}}$$

Donc $\boxed{|H(\nu)| = 1}$ et $\boxed{\mathrm{Arg}(H(\nu)) = -2\pi\nu\theta}$

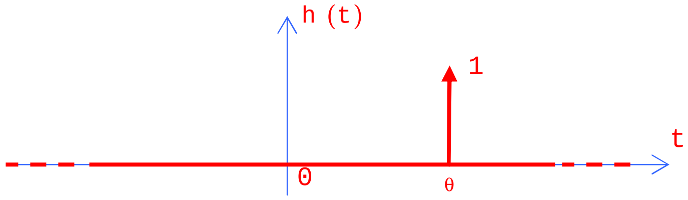
1 En déduire la réponse impulsionnelle du SLIT.

On rappelle que la fonction de transfert est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Pour déterminer $h(t)$, il suffit donc de calculer la transformée inverse de Fourier de $H(\nu)$. Dans l'expression de $H(\nu) = 1 \cdot e^{-j2\pi\nu\theta}$ on remarque l'application du théorème du décalage d'où :

$$\boxed{h(t) = \delta(t-\theta)}$$

On remarque que la réponse du SLIT à une impulsion de Dirac est une impulsion de Dirac décalée. Ce SILT est donc un retardateur pur.

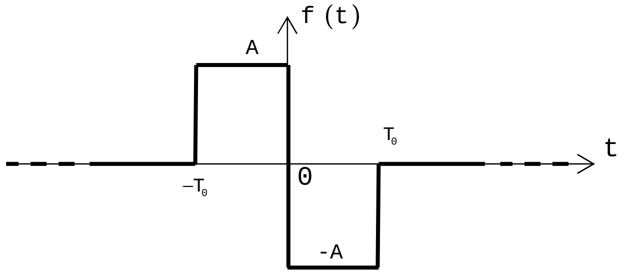
0,5 Représenter graphiquement cette réponse impulsionnelle.



EXERCICE 2 4

(Exercice inspiré des annales d'examen SY53)

Considérons la fonction f(t) suivante :



1 **1)** Exprimer f(t) à l'aide des fonctions usuelles.

Il s'agit de deux fonctions rectangles décalées :

$$\boxed{f(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t + \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) - A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)}$$

On peut aussi exprimer f(t) de la façon suivante :

$$\boxed{f(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) * \left[\delta\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right]}$$

1 **2)** Déterminer $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f(t).

$$F(\nu) = AT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\,e^{j2\pi\nu\frac{T_0}{2}} - AT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\,e^{-j2\pi\nu\frac{T_0}{2}}$$

$$F(\nu) = AT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\left(e^{j\pi\nu T_0} - e^{-j\pi\nu T_0}\right) = 2jAT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\left(\frac{e^{j\pi\nu T_0} - e^{-j\pi\nu T_0}}{2j}\right)$$

d'où

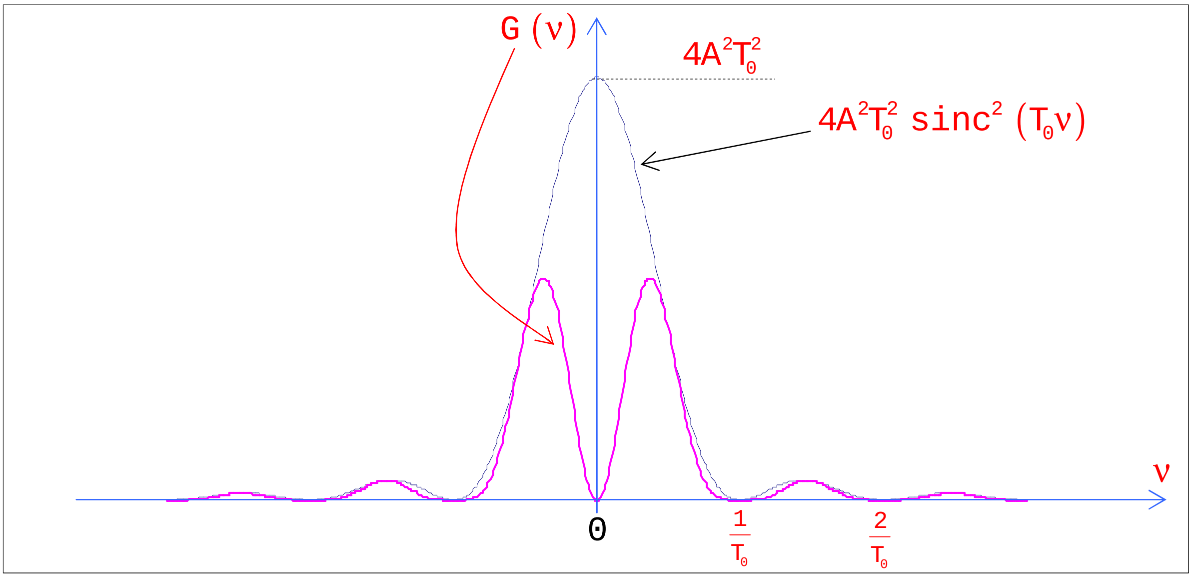
$$\boxed{F(\nu) = 2jAT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\sin(\pi\nu T_0)}$$

3) Déterminer $G(\nu)$, la DSE (Densité Spectrale d'Energie) de f(t).

1 $$DSE_f = F(\nu)F^*(\nu) = |F(\nu)|^2 = |2jAT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\sin(\pi\nu T_0)|^2$$

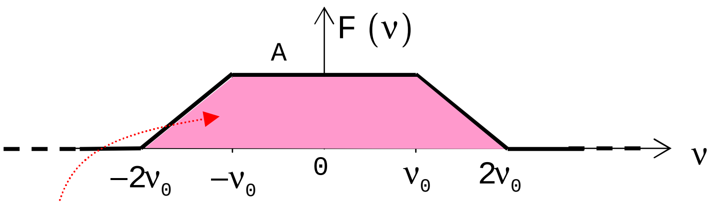
$$\boxed{G(\nu) = 4A^2T_0^2\,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)\sin^2(\pi\nu T_0)}$$

1 Représenter graphiquement $G(\nu)$.



EXERCICE 3 2

Considérons le signal x(t) qui a pour DSP (densité Spectrale de Puissance) la fonction $F(\nu)$ suivante :



2 **1)** Déterminer P_{moy} la puissance moyenne du signal x(t).

$$P_{moy} = \int_{-\infty}^{+\infty} DSP(\nu)\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\,d\nu = 3A\nu_0$$

EXERCICE 4 2

Considérons le signal f(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $F(\nu)$ suivante :

$$F : \nu \rightarrow F(\nu) = A\operatorname{sinc}(\nu T_0)$$

2 **1)** Déterminer E l'énergie totale du signal f(t).

Grâce au théorème de Parseval, on peut dire :

$$E_{Totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |A\operatorname{sinc}(\nu T_0)|^2\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\operatorname{sinc}^2(\nu T_0)\,d\nu$$

On pose le changement de variable $\theta = \nu T_0$, $d\theta = T_0 d\nu$

$$E_{Totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\operatorname{sinc}^2(\theta)\frac{d\theta}{T_0} = \frac{A^2}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}^2(\theta)\,d\theta$$ d'où $\boxed{E_{Totale} = \frac{A^2}{T_0}}$

EXERCICE 5 3

(Exercice fait et corrigé en TD)

Considérons un SLIT ayant pour réponse impulsionnelle h(t).

3 **1)** Déterminer, par deux méthodes différentes, la réponse du SLIT à l'excitation complexe $e(t) = e^{j2\pi\nu_0 t}$.

Méthode 1 :

(Voir TD pour plus de détails)

$$s(t) = h(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, e^{j2\pi\nu_0 (t-a)} da = e^{j2\pi\nu_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, e^{-j2\pi\nu_0 a} da$$

D'où $\boxed{s(t) = e(t)\,H(\nu_0)}$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, e^{-j2\pi\nu_0 a} da$ est la transformée de Fourier de h(t) calculée au point ν_0.

Méthode 2 :

(Voir TD pour plus de détails)

$S(\nu) = E(\nu)\,H(\nu)$ or $E(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$

D'où $S(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)\,H(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)\,H(\nu_0)$

Et donc par transformation inverse de Fourier

$$\boxed{s(t) = e^{j2\pi\nu_0 t}\ H(\nu_0) = e(t)\,H(\nu_0)}$$

Questions de cours 3

2 **1)** Si $f(\theta)$ est un signal représentant une pression en Pascal en fonction d'un angle θ en radian et $g(\theta)$ un signal représentant un volume en m^3 en fonction d'un angle θ en radian, déterminer l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

$f(\theta)$ est en Pa donc $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, e^{-j2\pi\nu\theta} d\theta$ est en (Pa.rd)

$G(\nu)$ la transformée de Fourier de g.

$g(\theta)$ est en m^3 donc $G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\, e^{-j2\pi\nu\theta} d\theta$ est en (m^3.rd)

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale de Puissance de f.

$S_{ff}(\nu) = \underset{\Theta \to +\infty}{\mathrm{Lim}} \left(\frac{1}{\Theta} \left| F_{\Theta}(\nu) \right|^2 \right)$ est en (Pa^2.rd).

$S_{fg}(\nu)$ la densité spectrale de Puissance d'interaction de f avec g.

$S_{fg}(\nu) = \underset{\Theta \to +\infty}{\mathrm{Lim}} \left(\frac{1}{\Theta} F_{\Theta}(\nu) G_{\Theta}^{*}(\nu) \right)$ est en ($Pa.m^3$.rd) ou (N.m.rd)

1 **2)** Si $f(t)$ est un signal périodique de période T_0, que pouvez-vous dire sur sa transformée de Fourier $F(\nu)$?

$F(\nu)$ sera de la forme $F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T_0} \right)$ où α_n représente les coefficients de la série de Fourier de f(t). La représentation graphique de $F(\nu)$ est un spectre complexe de raies.
(Voir cours pour plus de détails)

FORMULAIRE

Convolution : $f * g$: $t \rightarrow (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, g(t-a)\, da$

Puissance instantanée d'interaction $\boxed{P_{xy}(t) = x(t) \cdot y^*(t)}$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et

$\left(\frac{S}{B}\right)_{max\,dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\text{ dB}$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi n t}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi n t}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi n t}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi a t} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \underset{T \to +\infty}{\mathrm{Lim}}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \underset{T \to +\infty}{\mathrm{Lim}}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu)\, G_T^*(\nu)\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x^*(t - \tau)\right] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt$$

$$\text{et } C_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y^*(t - \tau)\right] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) + \sin(a - b)\right]$$