NOM :	**TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /20,5
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

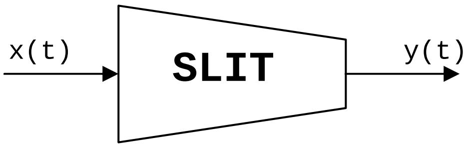
Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 6,5

Considérons les deux fonctions complexes $F_1(\nu)$ et $F_2(\nu)$ définies de la façon suivante :

$F_1 : \nu \to F_1(\nu) = A^2 \text{sinc}^2(\nu T_0)$ et $F_2 : \nu \to F_2(\nu) = A^2 \text{sinc}^2(\nu T_0)\, e^{-j2\pi\nu\theta}$

Considérons un SLIT (Système Linéaire Invariant par Translation de sa variable) ayant pour fonction de transfert harmonique la fonction $H(\nu)$.



Considérons y(t) la réponse du SLIT à l'excitation x(t).

On considère que $F_1(\nu)$ est la DSE (densité Spectrale d'Energie) du signal x(t) et que $F_2(\nu)$ est la DSEI (Densité Spectrale d'Energie d'Interaction) entre y(t) et x(t).

1) Déterminer une expression mathématique de x(t).

1

En déduire l'expression de y(t) correspondante.

1,5

2) Rappeler et démontrer la relation qui lie la DSEI entre la sortie et l'entrée d'un SLIT avec la DSE à l'entrée de ce même SLIT.

1

1,5 En déduire l'expression mathématique de la fonction de transfert $H(\nu)$ du SLIT. On déterminera $H(\nu)$, $|H(\nu)|$ et $\arg(H(\nu))$.

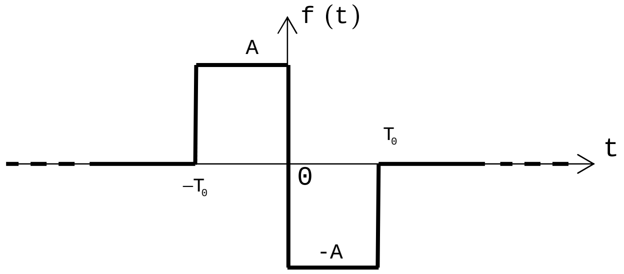
1 En déduire la réponse impulsionnelle du SLIT.

0,5 Représenter graphiquement cette réponse impulsionnelle.

EXERCICE 2 4

(Exercice inspiré des annales d'examen SY53)

Considérons la fonction f(t) suivante :



1 **1)** Exprimer f(t) à l'aide des fonctions usuelles.

2) Déterminer $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f(t).

1

3) Déterminer $G(\nu)$, la DSE (Densité Spectrale d'Energie) de f(t).

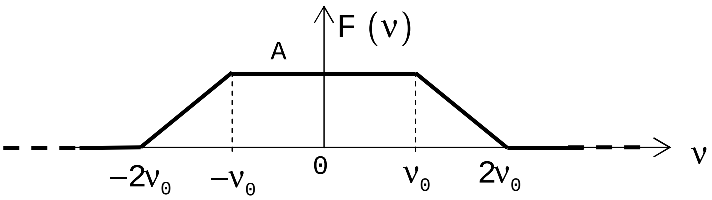
1

Représenter graphiquement $G(\nu)$.

1

EXERCICE 3 2

Considérons le signal x(t) qui a pour DSP (densité Spectrale de Puissance) la fonction $F(\nu)$ suivante :



2 **1)** Déterminer P_{moy} la puissance moyenne du signal x(t).

EXERCICE 4 2

Considérons le signal f(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $F(\nu)$ suivante :

$$F : \nu \rightarrow F(\nu) = A\mathrm{sinc}(\nu T_0)$$

2 **1)** Déterminer E l'énergie totale du signal f(t).

EXERCICE 5 3

(Exercice fait et corrigé en TD)

Considérons un SLIT ayant pour réponse impulsionnelle h(t).

3 **1)** Déterminer, par deux méthodes différentes, la réponse du SLIT à l'excitation complexe $e(t) = e^{j2\pi\nu_0 t}$.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

Questions de cours 3

2 **1)** Si $f(\theta)$ est un signal représentant une pression en Pascal en fonction d'un angle θ en radian et $g(\theta)$ un signal représentant un volume en m^3 en fonction d'un angle θ en radian, déterminer l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

$G(\nu)$ la transformée de Fourier de g.

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale de Puissance de f.

$S_{fg}(\nu)$ la densité spectrale de Puissance d'interaction de f avec g.

1 **2)** Si $f(t)$ est un signal périodique de période T_0, que pouvez-vous dire sur sa transformée de Fourier $F(\nu)$?

FORMULAIRE

Convolution : $f * g :\quad t \rightarrow (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,g(t-a)\,da$

Puissance instantanée d'interaction $\boxed{P_{xy}(t) = x(t)\cdot y^*(t)}$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et $\left(\frac{S}{B}\right)_{max\,dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\ dB$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\text{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}(\nu)$$

$$\text{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{sinc}^2(\nu)$$

$$\text{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{rect}(\nu)$$

$$\text{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{tri}(\nu)$$

$$\text{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\text{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T \to +\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T \to +\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t-\tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y^*(t-\tau)\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$