NOM :	Correction TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /20
Durée : 1H50. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

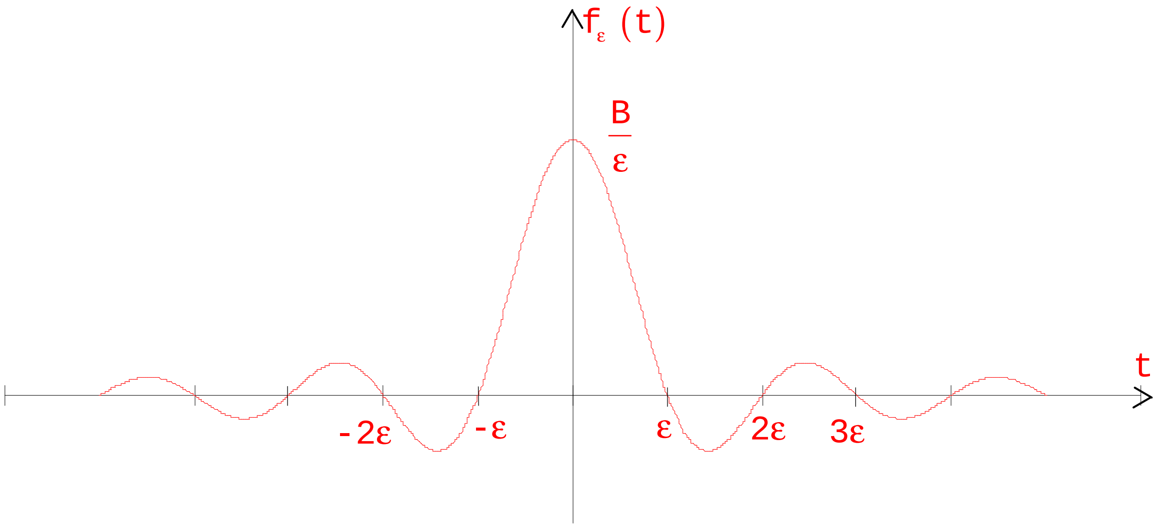
Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 2,5

(Exercice inspiré du polycopié de TD)

Considérons la fonction $f_\varepsilon(t) = \frac{B}{\varepsilon}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$

1 **1)** Représenter graphiquement $f_\varepsilon(t)$.



2) Déterminer $A = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)\,dt$. Que devient A quand $\varepsilon \to 0$?

1 $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B}{\varepsilon}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt$ on effectue le changement de variable

$\theta = \frac{t}{\varepsilon}$ et $d\theta = \frac{dt}{\varepsilon}$ d'où $\boxed{A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B}{\cancel{\varepsilon}}\operatorname{sinc}(\theta)\,\cancel{\varepsilon}\,d\theta = B = cte}$.

On remarque que A ne dépend pas d'ε.

0,5 En déduire $f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [f_\varepsilon(t)]$.

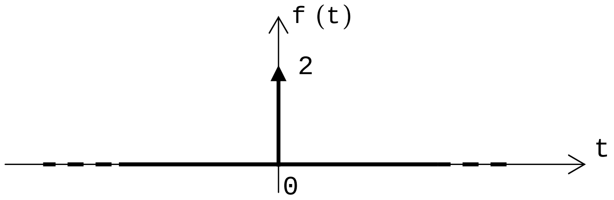
Quand $\varepsilon \to 0^+$, $\frac{B}{\varepsilon} \to +\infty$. Le sinus cardinal se « contacte » en largeur et son amplitude tend vers l'infini. A reste constant. Il s'agit donc d'un Dirac.

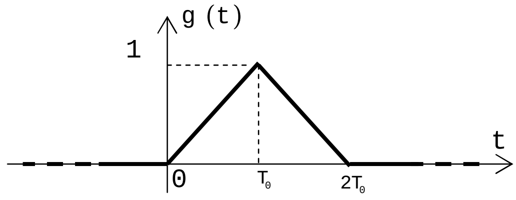
$$\boxed{f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [f_\varepsilon(t)] = B\delta(t)}$$

EXERCICE 2 5,5

(Exercice inspiré des annales d'examen SY53)

Considérons les signaux f et g suivants :





1 **1)** Déterminer la Densité Spectrale d'Energie du signal f.

La DSE notée $S_{ff}(\nu) = F(\nu)F^*(\nu)$ or $f(t) = 2\delta(t)$

D'où $\begin{cases} F(\nu) = 2 \in \mathbb{R} \\ F^*(\nu) = F(\nu) \end{cases}$ donc $\boxed{S_{ff}(\nu) = 4}$

2 **2)** Déterminer la Densité Spectrale d'Energie d'Interaction $S_{gf}(\nu)$ entre les signaux g et f.

La DSEI de g et f notée $S_{gf}(\nu) = G(\nu)F^*(\nu)$

or $g(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t - T_0}{T_0}\right)$ d'où $G(\nu) = T_0 \,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)\, e^{-j2\pi\nu T_0}$

d'où $\boxed{S_{gf}(\nu) = 2T_0 \,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)\, e^{-j2\pi\nu T_0}}$

3) En considérant que g(t) est le signal de sortie d'un Système Linéaire Invariant dans le Temps excité par le signal f(t), déterminer la fonction de transfert harmonique du système (on rappellera la formule qui lie la DSEI entre la sortie et l'entrée d'un SLIT et la DSE du signal d'entrée).

On rappelle que $S_{gf}(\nu) = G(\nu)F^*(\nu) = \underbrace{H(\nu)F(\nu)}_{G(\nu)}F^*(\nu)$

2 Donc $\boxed{S_{gf}(\nu) = H(\nu)S_{ff}(\nu)}$ D'où $\boxed{H(\nu) = \frac{S_{gf}(\nu)}{S_{ff}(\nu)} = \frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)\, e^{-j2\pi\nu T_0}}$

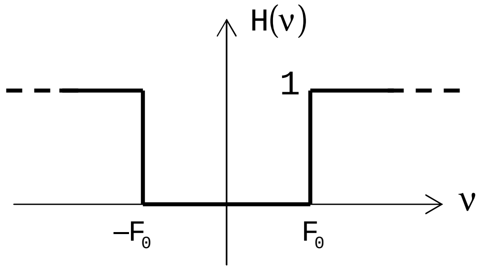
Déterminer la réponse impulsionnelle h(t) de ce système.

0,5 Comme g(t) est la réponse du SLIT à $f(t) = 2\delta(t)$, alors la réponse impulsionnelle $\boxed{h(t) = \frac{g(t)}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t-T_0}{T_0}\right)}$

EXERCICE 3 6

(Exercice inspiré du polycopié de cours)

Considérons le filtre idéal passe-haut suivant dont la fonction de transfert harmonique $H(\nu)$ est réelle.



0,5 **1)** Déterminer l'expression mathématique de $H(\nu)$.

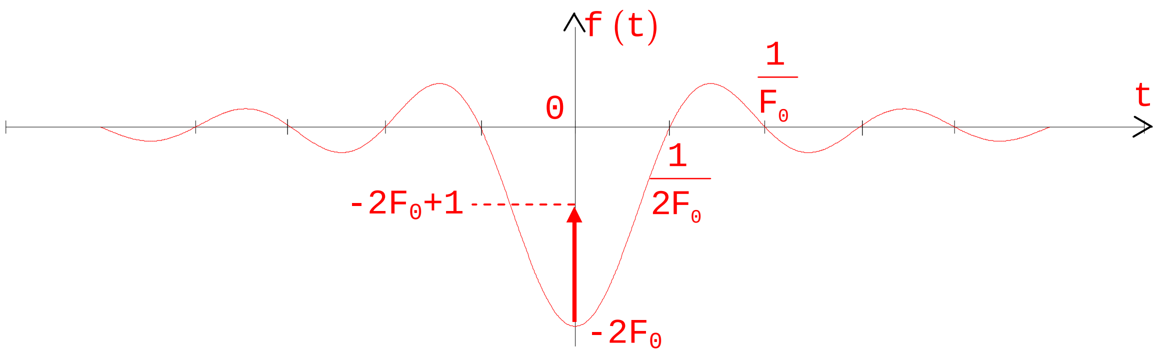
$$\boxed{H(\nu) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2F_0}\right)}$$

1,5 **2)** Déterminer la réponse impulsionnelle f(t) de ce filtre passe-haut idéal.

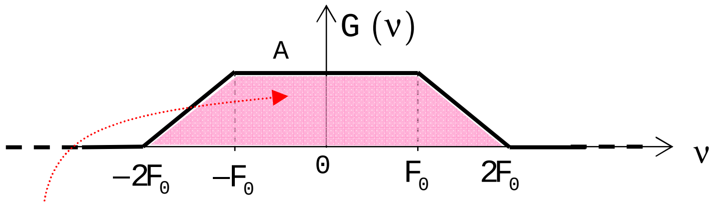
On rappelle que la réponse impulsionnelle est la transformée inverse de Fourier de la fonction de transfert.

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\nu)) = \delta(t) - 2F_0\,\mathrm{sinc}(2F_0 t)}$$

0,5 **3)** Représenter graphiquement f(t).



Considérons le signal x(t) qui a pour DSE (Densité Spectrale d'Energie) la fonction $G(\nu)$ suivante :



1 **4)** Déterminer l'énergie totale E_{Tx} de ce signal x(t).

$$E_{Tx} = \int_{-\infty}^{+\infty} DSE(\nu)\, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)\, d\nu = 3AF_0$$

On applique le signal x(t) à l'entrée du filtre passe-haut idéal défini précédemment. On appellera y(t) le signal de sortie du filtre excité par x(t).

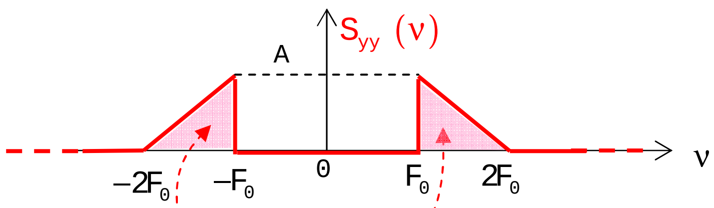
5) Déterminer la densité spectrale d'énergie du signal y(t).

1 La DSE notée $S_{yy}(\nu) = Y(\nu)\, Y^*(\nu) = \underbrace{H(\nu)\, X(\nu)}_{Y(\nu)}\, H^*(\nu)\, X^*(\nu)$

D'où $\boxed{S_{yy}(\nu) = S_{xx}(\nu)\left|H(\nu)\right|^2 = G(\nu)\left|H(\nu)\right|^2}$

Représenter graphiquement cette DSE.

0,5

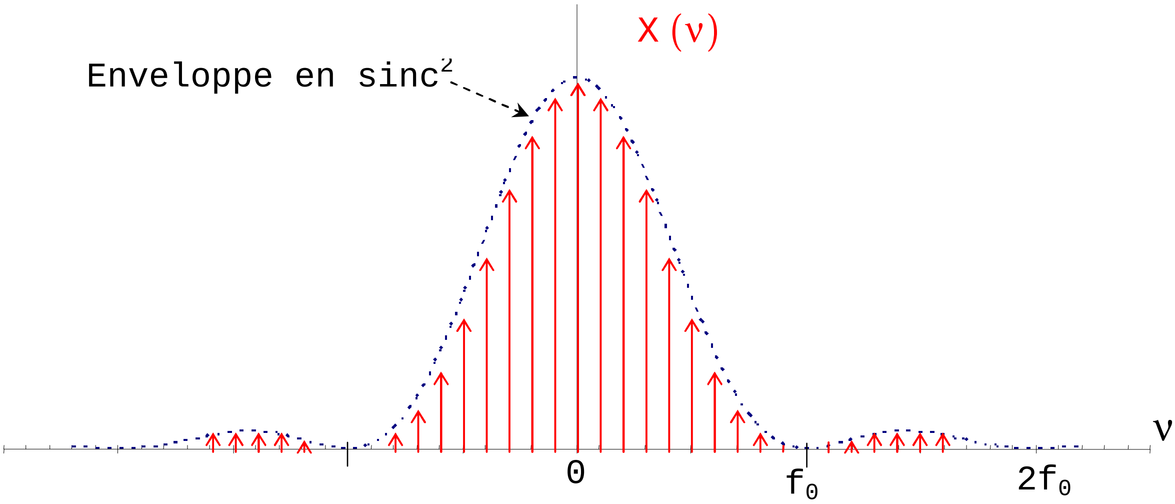


1 **6)** Déterminer l'énergie totale E_{Ty} du signal y(t).

$$E_{Ty} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\nu)\, d\nu = AF_0$$

EXERCICE 4 3

Considérons le signal x(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $X(\nu)$ réelle suivante :



3 **1)** Que pouvez-vous dire sur le signal x(t) ?

$X(\nu)$ est une fonction réelle paire donc sa transformée inverse x(t) est réelle paire.

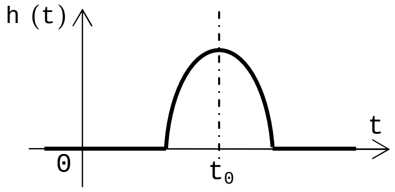
$X(\nu)$ étant constituée de dirac périodiquement espacés (spectre de raies)(période $f_0/10$), on en déduit que x(t) est une fonction périodique de période $10/f_0$.

L'enveloppe de $X(\nu)$ étant un sinc^2, on en déduit que x(t) est un motif triangulaire de demi largeur $1/f_0$ périodiquement répété à la fréquence $f_0/10$. En effet comme $X(\nu)$ est de la forme $\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu}{f_0}\right)\cdot Ш_{\frac{f_0}{10}}(\nu)$, alors x(t) est de la forme $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu}{f_0}\right)\cdot Ш_{\frac{f_0}{10}}(\nu)\right] =$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\nu}{f_0}\right)\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[Ш_{\frac{f_0}{10}}(\nu)\right] = f_0\,\mathrm{tri}(f_0 t) * \frac{10}{f_0} Ш_{\frac{10}{f_0}}(t)$$

Questions de cours 3

1,5 **1)** Considérons un Système linéaire invariant par translation de sa variable ayant une réponse impulsionnelle causale présentant un axe de symétrie vertical.
Exemple :



Quelle particularité aura sa fonction de transfert ? (Expliquer)

h(t) apparaît comme une fonction paire f(t) retardée de t_0.
Donc la fonction de transfert $H(\nu)$ qui est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)=f(t-t_0)$, sera de la forme $H(\nu) = F(\nu)\,e^{-j2\pi\nu t_0}$ en raison de l'application du théorème du retard de la transformée de Fourier. On notera que $F(\nu)$ est réelle pure car f(t) est une fonction paire.
L'argument de $H(\nu)$ est donc égal à $\mathrm{Arg}(H(\nu)) = -2\pi\nu t_0$.
Le système induit donc un déphasage proportionnel à la fréquence. Son déphasage apparaît alors comme un retard indépendant de la fréquence.
Ce système est dit « à phase linéaire ».

1,5 **2)** Si $f(x)$ est un signal représentant une force en Newton en fonction d'une abscisse x en mètre, déterminer l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

$f(x)$ est en Newton (N) donc $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-j2\pi\nu x}dx$ est en (N.m)

$G(\nu)$ la Densité spectrale d'énergie de f.
$G(\nu) = F(\nu)\,F^*(\nu)$ donc $G(\nu)$ est en ($N^2.m^2$)

$H(\nu)$ la Densité spectrale de puissance de f.

$H(\nu) = \underset{X_0 \to +\infty}{\mathrm{Lim}} \left(\frac{1}{X_0} \left|F_{X_0}(\nu)\right|^2 \right)$ donc $H(\nu)$ est en ($N^2.m$)

FORMULAIRE

Convolution : $f * g : \quad t \to (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,g(t-a)\,da$

Puissance instantanée d'interaction $\boxed{P_{xy}(t) = x(t)\cdot y^*(t)}$

Energie totale : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt$

Energie d'interaction sur l'intervalle T : $E_{xy}(T) = \int_T x(t) y^*(t) dt$

Puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Signaux aléatoires :

Moyenne : $moy = E(x_i) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T x_i(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)dx$

Puissance : $P = E(x_i^2) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_T (x_i(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$

Rapport signal/bruit de quantification : $\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = 12.2^{2N-3}$ et $\left(\frac{S}{B}\right)_{max\,dB} = 6{,}02.N + 1{,}76\text{ dB}$

Décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right)\right]$$

avec $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\Pi nt}{T}\right) dt$

ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\Pi nt}{T}}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\Pi nt}{T}} dt$ et $\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt$

Transformation de Fourier :

$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\Pi\nu t} dt$ et $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\Pi\nu t}\, d\nu}$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

$f(-t) \xrightarrow{TF} F(-\nu)$

$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-\nu)$

$f(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\Pi a\nu} F(\nu)$

$e^{j2\Pi at} f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu - a)$

$f \times g \xrightarrow{TF} F * G$

$f * g \xrightarrow{TF} F \times G$

$f'(t) \xrightarrow{TF} j2\Pi\nu\, F(\nu)$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{TF} (j2\Pi\nu)^n F(\nu)$$

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu) \xrightarrow{TF} f(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée des signaux périodiques : $\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta\left(\frac{n}{T} - \nu\right)}$

Autres propriétés :

$f(t)$	$F(\nu)$
réelle	Re(F) est paire Im(F) est impaire
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire

Quelques Transformées de Fourier.

$$1 \xrightarrow{\text{Fourier}} \delta(\nu)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} 1$$

$$\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\mathrm{tri}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{rect}(\nu)$$

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathrm{tri}(\nu)$$

$$\mathrm{ie1}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{1 + j2\pi\nu}$$

$$\mathrm{ie2}(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\mathrm{ig}(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi\nu^2}$$

$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f) + \delta(\nu + f)\right)$$

Signaux à énergie finie :

DSE : $S_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ DSEI : $S_{fg}(\nu) = F(\nu)G^*(\nu)$

Signaux à énergie non finie :

DSP : $S_{ff}(\nu) = \lim_{T \to +\infty}\left(\frac{1}{T}|F_T(\nu)|^2\right)$

pour les fonctions périodiques $S_{ff}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$

DSPI : $S_{fg}(\nu) = \lim_{T \to +\infty}\left(\frac{1}{T} F_T(\nu) G_T^*(\nu) d\nu\right)$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions à énergie non finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Pour les fonctions périodiques :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau)\, dt \quad \text{et} \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau)\, dt$$

Autocorrélation et intercorrélation des fonctions aléatoires

$$C_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt$$

$$\text{et} \quad C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t - \tau)] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

Formules d'Euler.

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Formules de trigonométrie.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) + \sin(a - b)\right]$$