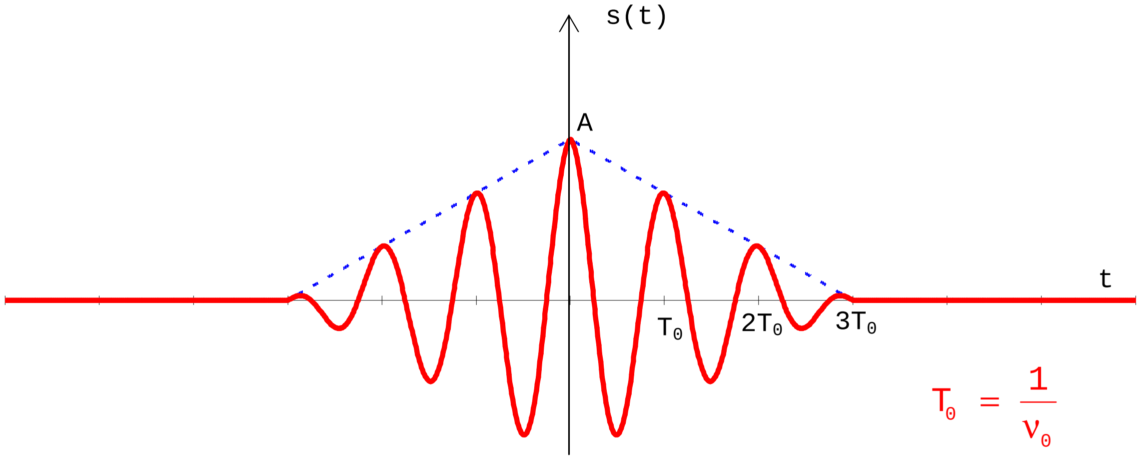
NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /20
Durée : 1H40. Calculatrice <u>non autorisée</u> car <u>inutile.</u> Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées <u>littéralement</u> avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 6,5

Considérons le signal réel s(t) suivant:



1,5 **1)** Proposer un modèle mathématique du signal s(t).

On peut considérer que s(t) est le produit d'une fonction cosinus d'amplitude A et de période T_0 par une fonction triangle de largeur $6T_0$ et de hauteur 1.

$$\boxed{s(t) = f(t)\cdot g(t) \text{ avec } \begin{cases} f(t) = \mathrm{tri}\left(\dfrac{t}{3T_0}\right) \\ g(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t) \end{cases}}$$

2 **2)** Déterminer $S(\nu)$, la transformée de Fourier de s(t).

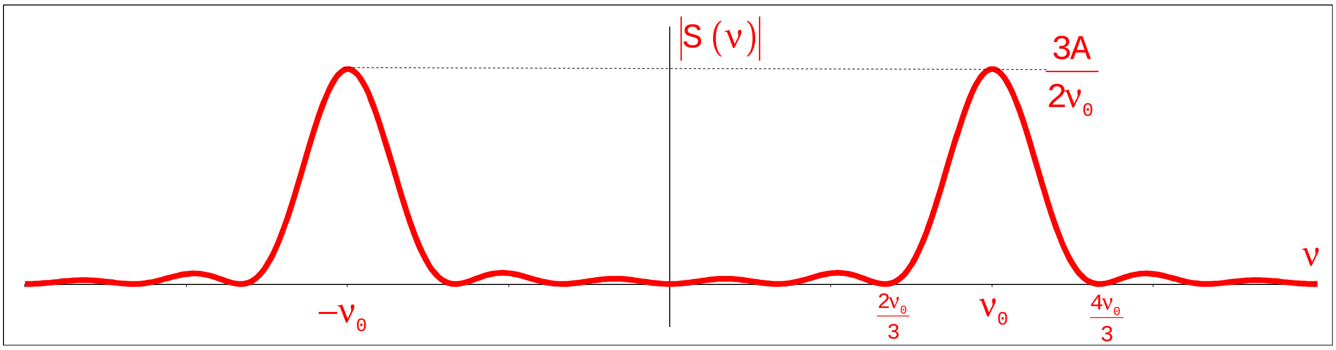
Comme $s(t) = f(t)\cdot g(t)$, alors $S(\nu) = F(\nu) * G(\nu)$

Or $F(\nu) = 3T_0\,\mathrm{sinc}^2(3T_0\nu)$ et $G(\nu) = \frac{A}{2}\delta(\nu-\nu_0) + \frac{A}{2}\delta(\nu+\nu_0)$

d'où $\boxed{S(\nu) = \frac{3A}{2}T_0\,\mathrm{sinc}^2(3T_0(\nu-\nu_0)) + \frac{3A}{2}T_0\,\mathrm{sinc}^2(3T_0(\nu+\nu_0))}$ ou

$$\boxed{S(\nu) = \frac{3A}{2\nu_0}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3(\nu-\nu_0)}{\nu_0}\right) + \frac{3A}{2\nu_0}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3(\nu+\nu_0)}{\nu_0}\right)}$$

1 **3)** Représenter graphiquement $|S(\nu)|$



On considère maintenant que s(t) est la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire.

1 **4)** Montrer que la réponse impulsionnelle de ce filtre n'est pas causale.
s(t) n'est pas causale, car elle n'est pas nulle pour t<0.

Donner la fonction de transfert de ce filtre. Quel type de filtre obtient-on?
La fonction de transfert d'un SLIT est la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle.
Donc la fonction de transfert vaut:

$$\boxed{S(\nu) = \frac{3A}{2\nu_0}\,\text{sinc}^2\left(\frac{3(\nu-\nu_0)}{\nu_0}\right) + \frac{3A}{2\nu_0}\,\text{sinc}^2\left(\frac{3(\nu+\nu_0)}{\nu_0}\right)}$$

C'est un filtre passe-bande centré sur ν_0.

1 **5)** Déterminer h(t), une réponse impulsionnelle qui a la même forme que s(t) mais qui est causale.
Pour rendre causale s(t) il suffit de la retarder d'au moins $3T_0$.
On pourra par exemple choisir:

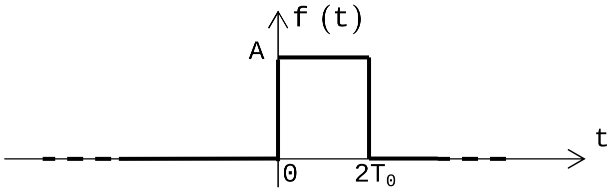
$$\boxed{h(t) = s(t-3T_0) = \text{tri}\left(\frac{t-3T_0}{3T_0}\right)\cdot A\cos\left(2\pi\nu_0(t-3T_0)\right)}$$

Déterminer alors la fonction de transfert de ce filtre qui a pour réponse impulsionnelle h(t).
D'où la fonction de transfert par application du théorème du retard:

$$\boxed{H(\nu) = S(\nu)\,e^{-j2\pi\nu 3T_0} = \left[\frac{3A}{2\nu_0}\,\text{sinc}^2\left(\frac{3(\nu-\nu_0)}{\nu_0}\right) + \frac{3A}{2\nu_0}\,\text{sinc}^2\left(\frac{3(\nu+\nu_0)}{\nu_0}\right)\right]e^{-j2\pi\nu 3T_0}}$$

EXERCICE 2 4

Considérons le signal f(t) suivant :



1 **1)** Déterminer la transformée de Fourier du signal f.

$f(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0}{2T_0}\right)$ d'où $\boxed{F(\nu) = 2T_0 A\,\mathrm{sinc}(2T_0\nu)\,e^{-j2\pi\nu T_0}}$

1,5 **2)** Déterminer la densité spectrale d'énergie du signal f.

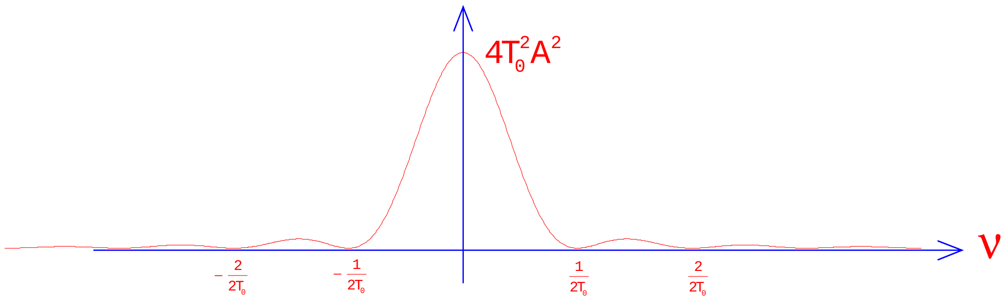
La DSE vaut $S_{ff}(\nu) = F(\nu)\,F^*(\nu)$ or,

$F(\nu) = 2T_0 A\,\mathrm{sinc}(2T_0\nu)\,e^{-j2\pi\nu T_0}$ et $F^*(\nu) = 2T_0 A\,\mathrm{sinc}(2T_0\nu)\,e^{+j2\pi\nu T_0}$

D'où $\boxed{S_{ff}(\nu) = F(\nu)\,F^*(\nu) = \left(2T_0 A\,\mathrm{sinc}(2T_0\nu)\right)^2}$

Représenter graphiquement cette densité spectrale.

$S_{ff}(\nu) = 4T_0^2A^2\,\mathrm{sinc}^2(2T_0\nu)$



1,5 **3)** Déterminer l'énergie totale du signal f par deux méthodes différentes.

Méthode 1 (Calcul direct sur f(t)):

$$\boxed{E_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = A^2 2T_0}$$

Méthode 2 (Application du théorème de Parseval):

$$E_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\nu)\,d\nu$$

$$E_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} 4T_0^2A^2\,\mathrm{sinc}^2(2T_0\nu)\,d\nu = 4T_0^2A^2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(2T_0\nu)\,d\nu$$

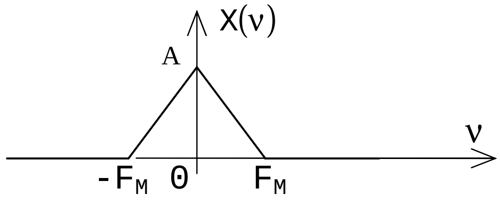
Puis en posant $\theta = 2T_0\nu$ et $d\theta = 2T_0\,d\nu$, on obtient:

$$E_{totale} = 4T_0^2A^2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(\theta)\,\frac{d\theta}{2T_0} = 2T_0A^2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(\theta)\,d\theta$$

Et enfin $\boxed{E_{totale} = 2T_0A^2}$

EXERCICE 3 6,5

Considérons le signal x(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $X(\nu)$ réelle pure. Pour faciliter les représentations graphiques on supposera que $X(\nu)$ a l'allure suivante :



Considérons le signal sinusoïdal $p(t) = B\cos(2\pi\nu_0 t)$ avec $\nu_0 = 4F_M$.

1,5 **1)** Calculer $P(\nu)$, la transformée de Fourier de p(t) en la démontrant par la méthode de votre choix.

On peut obtenir $P(\nu)$ par différentes méthodes (voir cours).

Par exemple en utilisant la réciproque du théorème du retard:

$$\mathcal{F}\left[\frac{B}{2}\right] = \frac{B}{2}\delta(\nu) \text{ puis}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{B}{2}e^{j2\pi\nu_0 t}\right] = \frac{B}{2}\delta(\nu-\nu_0) \text{ et } \mathcal{F}\left[\frac{B}{2}e^{-j2\pi\nu_0 t}\right] = \frac{B}{2}\delta(\nu+\nu_0)$$

Et enfin comme $B\cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{B}{2}e^{j2\pi\nu_0 t} + \frac{B}{2}e^{-j2\pi\nu_0 t}$

On obtient $\boxed{P(\nu) = \frac{B}{2}\delta(\nu-\nu_0) + \frac{B}{2}\delta(\nu+\nu_0)}$

Considérons la fonction $g(t) = x(t)\cdot p(t)$ (Pour information : c'est l'opération de modulation d'amplitude de la porteuse p(t) par le signal modulant x(t)).

2) Déterminer $G(\nu)$ la transformée de Fourier de g(t) en fonction de $X(\nu)$ et de l'expression de $P(\nu)$.

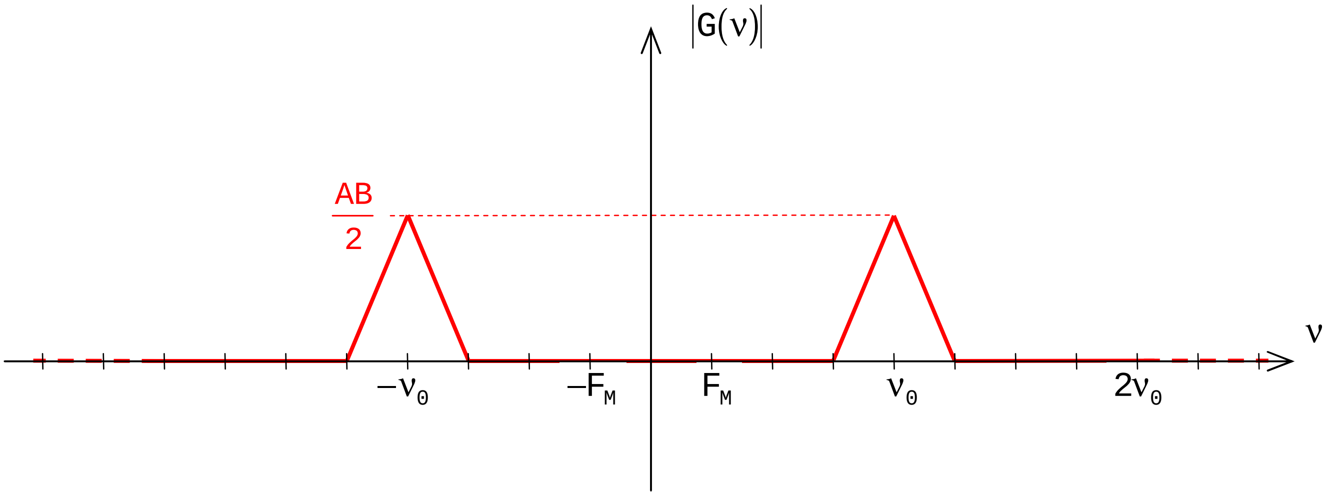
1 $g(t) = x(t)\cdot p(t)$ donc $G(\nu) = X(\nu) * P(\nu)$

$$G(\nu) = X(\nu) * \left[\frac{B}{2}\delta(\nu-\nu_0) + \frac{B}{2}\delta(\nu+\nu_0)\right]$$

$$\boxed{G(\nu) = \frac{B}{2}X(\nu-\nu_0) + \frac{B}{2}X(\nu+\nu_0)}$$

Représenter graphiquement le module de $G(\nu)$.

0,5



Afin de démoduler g(t) on multiplie à nouveau par p(t).
Posons $y(t) = g(t) \cdot p(t)$

1,5

3) Déterminer $Y(\nu)$ la transformée de Fourier de y(t) en fonction de $G(\nu)$ et de l'expression de $P(\nu)$ puis ensuite en fonction de $X(\nu)$ et de l'expression de $P(\nu)$.

$y(t) = g(t) \cdot p(t)$ donc $Y(\nu) = G(\nu) * P(\nu)$

$$Y(\nu) = G(\nu) * \left[\frac{B}{2}\delta(\nu - \nu_0) + \frac{B}{2}\delta(\nu + \nu_0)\right]$$

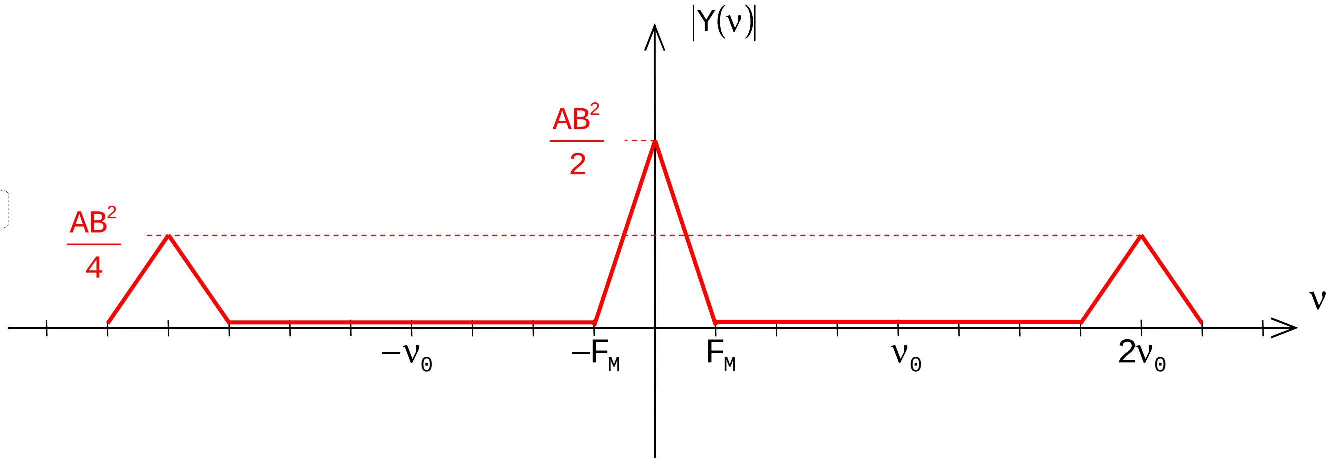
$$\boxed{Y(\nu) = \frac{B}{2}G(\nu - \nu_0) + \frac{B}{2}G(\nu + \nu_0)}$$

En utilisant la formule de la question précédente, on obtient:

$$\boxed{Y(\nu) = \frac{B^2}{4}X(\nu - 2\nu_0) + \frac{B^2}{4}X(\nu + 2\nu_0) + \frac{B^2}{2}X(\nu)}$$

Représenter graphiquement le module de $Y(\nu)$.

0,5



4) Expliquer, qualitativement et quantitativement, comment récupérer x(t) à partir de y(t) (justifier votre réponse).

1,5

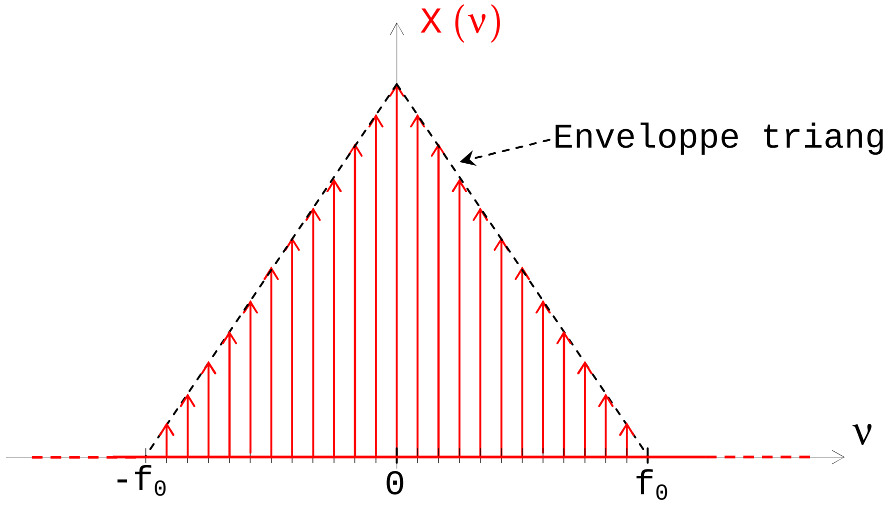
Pour récupérer x(t) à partir de y(t), il faut retrouver le spectre de x(t) dans celui de y(t). Il suffit donc "d'effacer" les termes indésirables de façon à ne conserver que le motif central qu'il faudra ensuite multiplier par $\frac{2}{B^2}$ afin de retrouver A.

Il faut donc filtrer à l'aide d'un filtre passe-bas:

- dont la bande passante comprend $[-F_M, F_M]$
- dont la bande coupée comprend $]-\infty, -2\nu_0 + F_M] \cup [2\nu_0 - F_M, +\infty[$
- dont l'amplification dans la bande passante vaut $\frac{2}{B^2}$.

EXERCICE 4 3

Considérons le signal x(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $X(\nu)$ réelle suivante :



3 **1)** Que pouvez-vous dire sur le signal x(t) ?

$X(\nu)$ est une fonction réelle paire donc sa transformée inverse x(t) est réelle paire.

$X(\nu)$ étant constituée de Dirac périodiquement espacés (spectre de raies)(période $f_0/12$), on en déduit que x(t) est une fonction périodique de période $12/f_0$.

L'enveloppe de $X(\nu)$ étant un triangle, on en déduit que x(t) est un motif en sinc^2 périodiquement répété à la fréquence $f_0/12$. En effet comme $X(\nu)$ est de la forme

$\mathrm{tri}\left(\frac{\nu}{f_0}\right)\cdot Ш_{\frac{f_0}{12}}(\nu)$, alors x(t) est de la forme

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{tri}\left(\frac{\nu}{f_0}\right)\cdot Ш_{\frac{f_0}{12}}(\nu)\right] =$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{tri}\left(\frac{\nu}{f_0}\right)\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[Ш_{\frac{f_0}{12}}(\nu)\right] = f_0\,\mathrm{sinc}^2(f_0 t) * \frac{12}{f_0} Ш_{\frac{12}{f_0}}(t)$$

x(t) est donc de la forme

$$\boxed{f_0\,\mathrm{sinc}^2(f_0 t) * \frac{12}{f_0} Ш_{\frac{12}{f_0}}(t) = 12\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\left(f_0\left(t - \frac{12n}{f_0}\right)\right)}$$