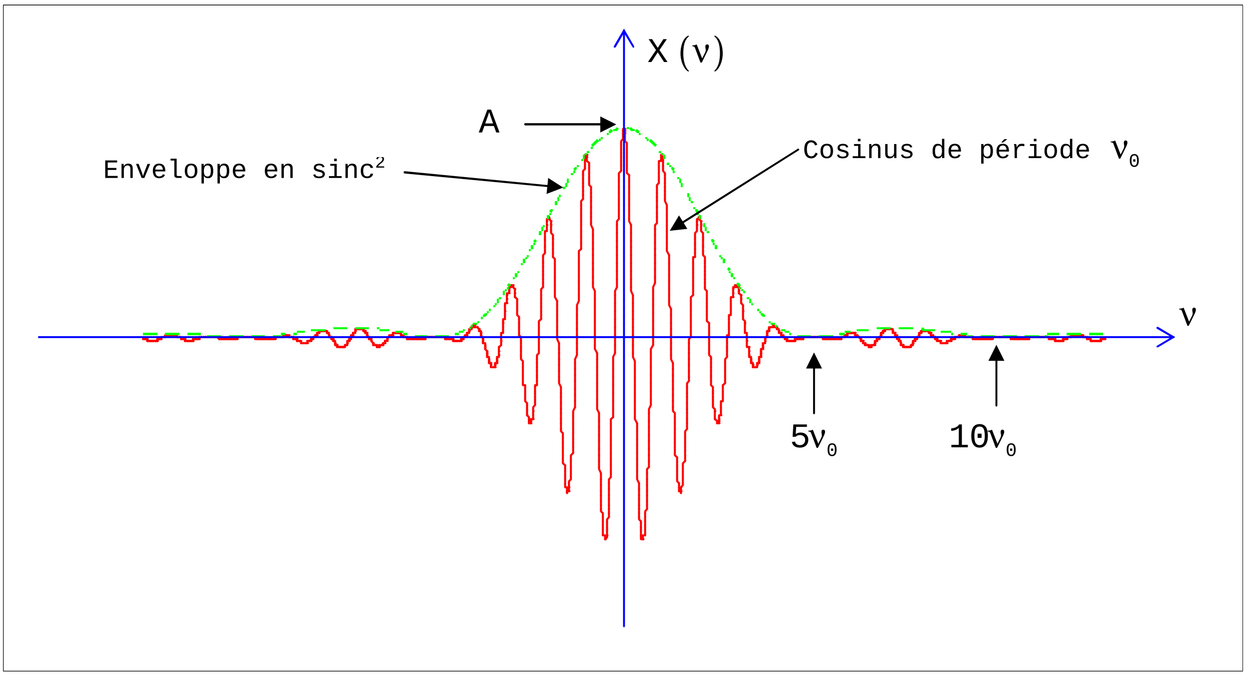
NOM :	**Correction** TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /20,5

Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 3,5

Considérons le signal x(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $X(\nu)$ réelle pure suivante :



3,5 **1)** Que pouvez-vous dire sur le signal x(t) ?

$X(\nu)$ est une fonction réelle paire donc x(t) sera réelle paire.

$X(\nu)$ apparaît comme le produit d'un sinc^2 par une fonction cos donc x(t) sera le produit de convolution d'un motif triangulaire par deux diracs.

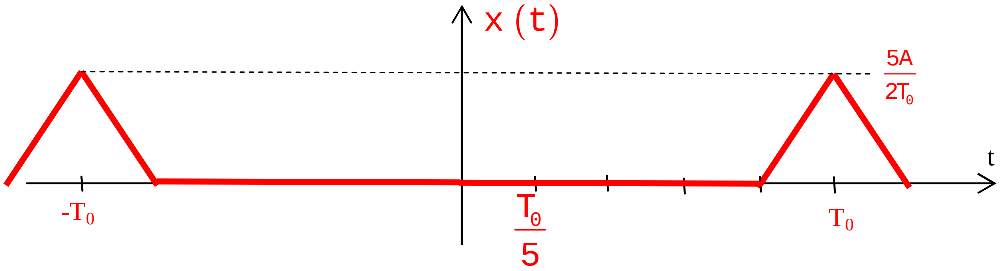
x(t) sera donc deux motifs triangulaires répartis symétriquement par rapport à l'origine (fonction paire).

$$X(\nu) = A\cos\left(2\pi\frac{\nu}{\nu_0}\right)\text{sinc}^2\left(\frac{\nu}{5\nu_0}\right)$$

d'où $x(t) = \frac{A}{2}\left[\delta\left(t - \frac{1}{\nu_0}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{\nu_0}\right)\right] * 5\nu_0 \mathrm{tri}(t5\nu_0)$

posons $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$ alors $x(t) = \frac{A}{2}\left[\delta(t - T_0) + \delta(t + T_0)\right] * \frac{5}{T_0}\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T_0/5}\right)$

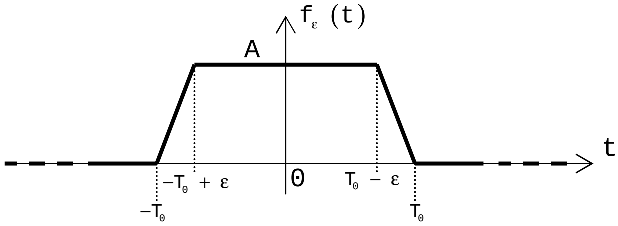
ou encore $\boxed{x(t) = \frac{5A}{2T_0}\left(\mathrm{tri}\left(\frac{t - T_0}{T_0/5}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{t + T_0}{T_0/5}\right)\right)}$



EXERCICE 2

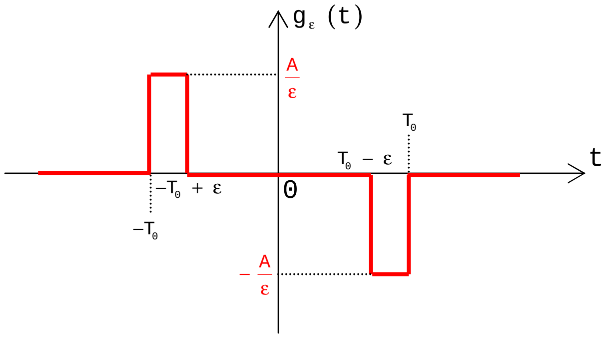
6

Considérons le signal $f_\varepsilon(t)$ suivant :



1) Représenter graphiquement $g_\varepsilon(t) = f'_\varepsilon(t)$ la dérivée de $f_\varepsilon(t)$.

1



Déterminer l'expression littérale de $g_\varepsilon(t)$.

1

$$g_\varepsilon(t) = \frac{A}{\varepsilon}\left(\mathrm{rect}\left(\frac{t + \frac{2T_0 - \varepsilon}{2}}{\varepsilon}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{2T_0 - \varepsilon}{2}}{\varepsilon}\right)\right)$$

2) Déterminer $G_\varepsilon(\nu)$ la transformé de Fourier de $g_\varepsilon(t)$.

$$G_\varepsilon(\nu) = \frac{A}{\varepsilon}\left(\varepsilon \operatorname{sinc}(\varepsilon\nu)\, e^{j2\pi\nu\frac{2T_0-\varepsilon}{2}} - \varepsilon \operatorname{sinc}(\varepsilon\nu)\, e^{-j2\pi\nu\frac{2T_0-\varepsilon}{2}}\right)$$

$$\boxed{G_\varepsilon(\nu) = A \operatorname{sinc}(\varepsilon\nu)\left(e^{j2\pi\nu\frac{2T_0-\varepsilon}{2}} - e^{-j2\pi\nu\frac{2T_0-\varepsilon}{2}}\right)}$$

2 Mais aussi

$$\boxed{G_\varepsilon(\nu) = 2jA \operatorname{sinc}(\varepsilon\nu)\sin\left(2\pi\nu\frac{2T_0-\varepsilon}{2}\right)}$$

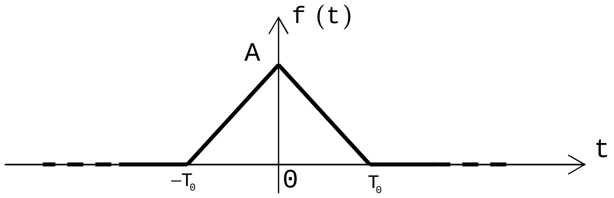
En déduire $F_\varepsilon(\nu)$ la transformé de Fourier de $f_\varepsilon(t)$.

On rappelle que si $f_\varepsilon(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} F_\varepsilon(\nu)$,

alors $f'_\varepsilon(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} j2\pi\nu F_\varepsilon(\nu) = G_\varepsilon(\nu)$

1 d'où $$\boxed{F_\varepsilon(\nu) = \frac{G_\varepsilon(\nu)}{j2\pi\nu} = \frac{A}{\pi\nu}\operatorname{sinc}(\varepsilon\nu)\sin\left(2\pi\nu\frac{2T_0-\varepsilon}{2}\right)}$$

3) En utilisant les questions précédentes <u>retrouver</u> $F(\nu)$, la transformée de Fourier de la fonction f(t) suivante :



On remarque que $f(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to T_0}(f_\varepsilon(t))$ d'où :

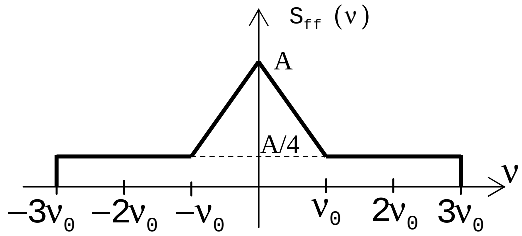
1 $$F(\nu) = \lim_{\varepsilon\to T_0}(F_\varepsilon(\nu)) = \frac{A}{\pi\nu}\operatorname{sinc}(T_0\nu)\sin\left(2\pi\nu\frac{2T_0-T_0}{2}\right)$$

$$F(\nu) = AT_0 \operatorname{sinc}(T_0\nu)\frac{\sin(\pi\nu T_0)}{\pi\nu T_0} = AT_0\operatorname{sinc}^2(T_0\nu)$$

Enfin $\boxed{F(\nu) = AT_0\operatorname{sinc}^2(T_0\nu)}$ (résultat connu)

EXERCICE 3 6

Considérons un signal f(t) ayant pour densité spectrale d'énergie la fonction $S_{ff}(\nu)$ suivante :



1) Déterminer E_f, l'énergie totale du signal f.

Comme $S_{ff}(\nu)$ est une densité spectrale d'énergie, il suffit d'intégrer sur **R** pour obtenir l'énergie totale :

1

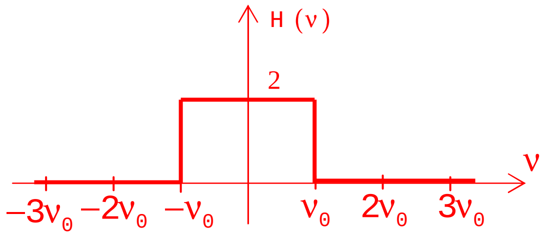
$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\nu)\, d\nu$ = l'aire sous la courbe

$E_f = \frac{A}{4} 6\nu_0 + \nu_0 \frac{3A}{4}$ d'où $\boxed{E_f = \frac{9A\nu_0}{4}}$

Ce signal f est appliqué à l'entrée d'un filtre **passe-bas** idéal d'amplification 2 dont la bande passante s'étend de $-\nu_0$ à $+\nu_0$. Le signal de sortie sera noté y(t).

2) Déterminer la fonction de transfert harmonique $H(\nu)$ de ce filtre idéal.

1



$\boxed{H(\nu) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)}$

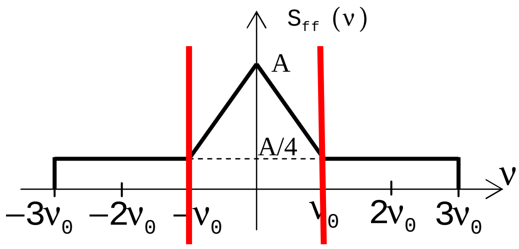
3) Déterminer la densité spectrale d'énergie $S_{YY}(\nu)$ du signal y(t) à la sortie du filtre.

1,5

$S_{yy}(\nu) = Y(\nu)\, Y^*(\nu) = F(\nu)\, H(\nu)\, F^*(\nu)\, H^*(\nu)$

$S_{yy}(\nu) = S_{ff}(\nu) \left|H(\nu)\right|^2$

On remarque cependant que dans la bande passante du filtre idéal, il ne reste que le motif triangulaire.



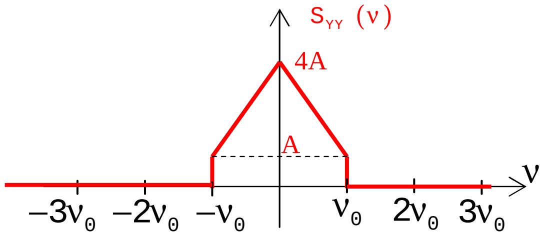
d'où

$$S_{yy}(\nu) = \left(\frac{3A}{4}\,\mathrm{tri}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) + \frac{A}{4}\right) 4\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right) = 3A\,\mathrm{tri}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) + A\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)$$

$$\boxed{S_{yy}(\nu) = 3A\,\mathrm{tri}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) + A\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)}$$

Représenter graphiquement $S_{YY}(\nu)$

0,5



Déterminer E_y l'énergie totale du signal y(t).

Comme $S_{yy}(\nu)$ est une densité spectrale d'énergie, il suffit

1 d'intégrer sur **R** pour obtenir l'énergie totale :

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\nu)\,d\nu = \text{l'aire sous la courbe}$$

$E_y = 2A\nu_0 + 3A\nu_0$ d'où $\boxed{E_y = 5A\nu_0}$

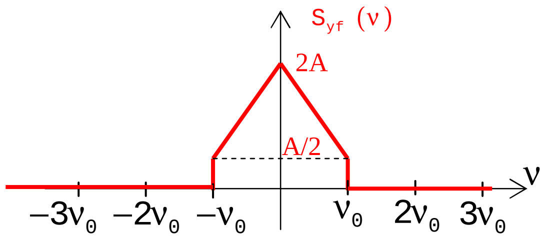
4) Déterminer $S_{Yf}(\nu)$, la densité spectrale d'énergie d'interaction entre y(t) et f(t).

$$S_{yf}(\nu) = Y(\nu)\,F^*(\nu) = F(\nu)\,H(\nu)\,F^*(\nu)$$

1

$$S_{yf}(\nu) = S_{ff}(\nu)\,H(\nu)$$

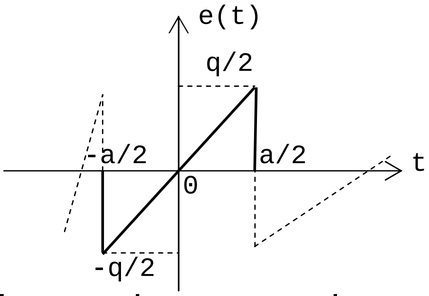
$$\boxed{S_{yf}(\nu) = S_{ff}(\nu)\,2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)}$$



Ou $\boxed{S_{yf}(\nu) = \frac{3A}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) + \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)}$

EXERCICE 4 2

Quantification d'un signal : Erreur de quantification.
Chaque fois que l'on quantifie un signal avec un quantum (q) suffisamment petit par rapport aux variations de la fonction, le signal d'erreur e(t) est composé d'une succession de motifs élémentaires assimilable à des dents de scie variant entre –q/2 et +q/2.



1) Déterminer p(t), la puissance instantanée du motif élémentaire en dent de scie ?

1 $p(t) = |e(t)|^2 = \left|\frac{q}{a}t\right|^2$ d'où $\boxed{p(t) = \frac{q^2}{a^2}t^2}$

En déduire Pmoy, la puissance moyenne du motif élémentaire en dent de scie

$$\text{Pmoy} = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{q^2}{a^2}t^2\right)dt = \frac{q^2}{3a^3}\left[t^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}$$

1 d'où $\boxed{\text{Pmoy} = \frac{q^2}{12}}$

On remarquera que Pmoy ne dépend pas de (a).

Questions de cours 3

1) Qu'est-ce qu'un filtre à phase linéaire ?
1 C'est un filtre dont le déphasage est proportionnel à la fréquence. Le déphasage apparaît alors comme un retard pur.

Quel peut être l'intérêt d'utiliser un tel filtre ?
Lorsque la variable est le temps, les impératifs de causalité imposent à tous les filtres de déphaser chaque composante
1 spectrale. Le déphasage est donc inévitable.
Si le déphasage est proportionnel à la fréquence, il n'y aura pas de distorsion de phase car toutes les composantes spectrales de la bande passante seront retardées du même temps.

Quelle particularité a la réponse impulsionnelle d'un tel filtre.
1 La réponse impulsionnelle présente un axe de symétrie vertical.