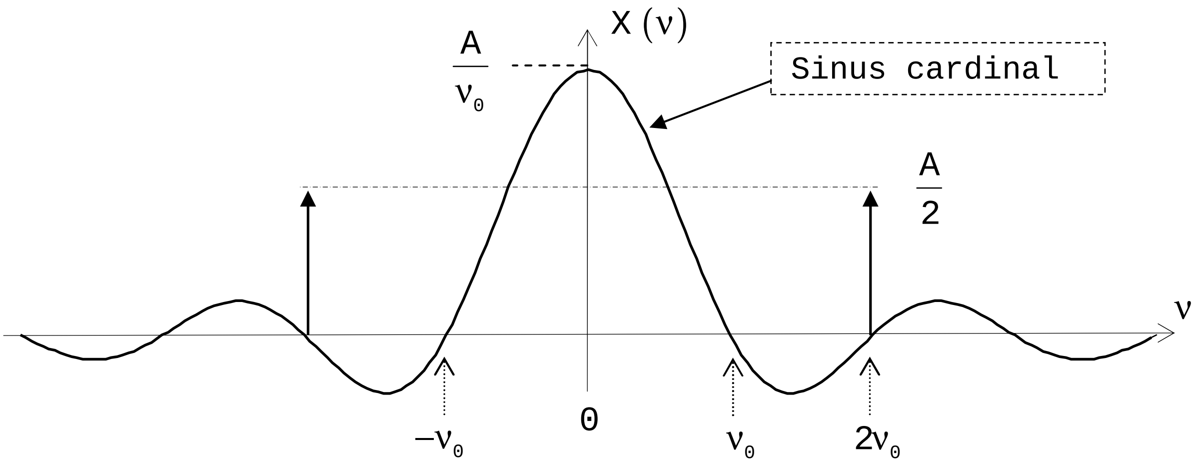
NOM :	**Correction** TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /21

Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 3,5

Considérons le signal x(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $X(\nu)$ réelle pure suivante :



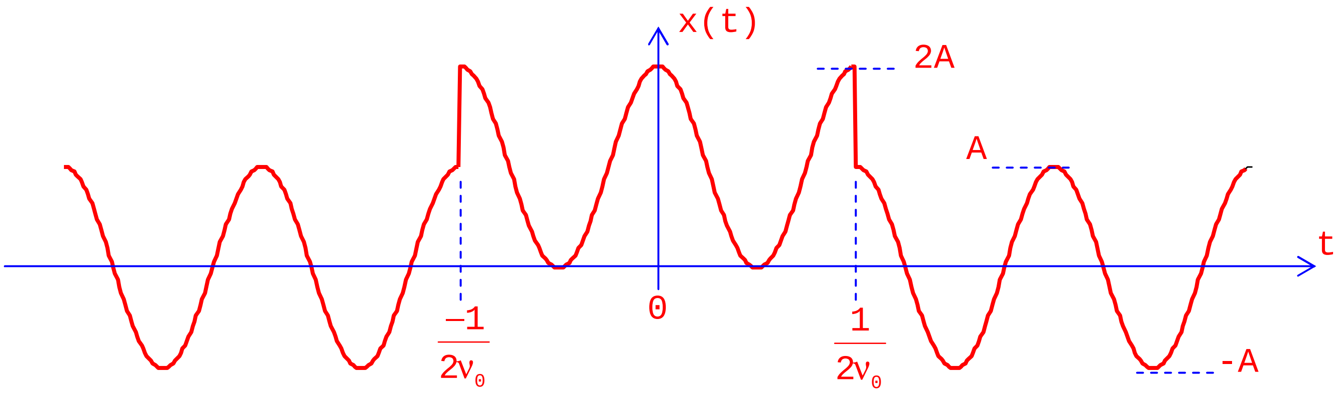
1 **1)** Exprimez mathématiquement $X(\nu)$ à l'aide des fonctions usuelles.

$$\boxed{X(\nu) = \frac{A}{\nu_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) + \frac{A}{2}\,\delta(\nu - 2\nu_0) + \frac{A}{2}\,\delta(\nu + 2\nu_0)}$$

1,5 **2)** A partir de $X(\nu)$, déterminez x(t).

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{rect}(\nu_0 t) + A\cos\left(2\pi(2\nu_0)\,t\right)}$$

1 **3)** Représentez graphiquement x(t).

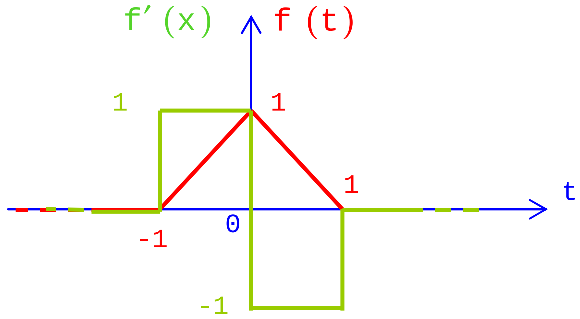


EXERCICE 2 5,5

Considérons le signal f(t) = tri(t).

1) Représentez, sur le même graphique, f(t) et sa dérivée f'(t).

1,5



2) Exprimez f'(t) à l'aide des fonctions usuelles et déterminez $G(\nu)$ la transformée de Fourier de g(t) = f'(t).

1 $$\boxed{f'(t) = \mathrm{rect}(t + 0,5) - \mathrm{rect}(t - 0,5)}$$

1,5 $$G(\nu) = \mathrm{sinc}(\nu)\, e^{j\pi\nu} - \mathrm{sinc}(\nu)\, e^{-j\pi\nu}$$

$$\boxed{G(\nu) = \mathrm{sinc}(\nu)\left[e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\right]}$$

3) En utilisant les questions précédentes <u>retrouvez</u> $F(\nu)$, la transformée de Fourier de la fonction f(t).

Si $f(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} F(\nu)$, alors $f'(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} j2\pi\nu\, F(\nu)$

1,5 (théorème de la dérivation).

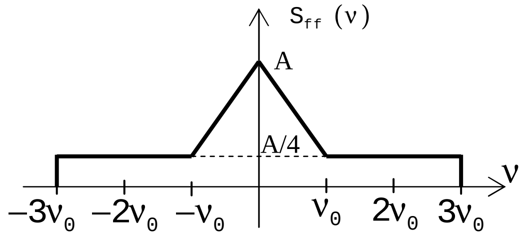
D'où donc $G(\nu) = j2\pi\nu\, F(\nu)$ et donc $F(\nu) = \dfrac{1}{j2\pi\nu}\, G(\nu)$

Enfin $F(\nu) = \text{sinc}(\nu)\left[\dfrac{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}}{2j\ \pi\nu}\right] = \text{sinc}(\nu)\,\dfrac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$

Donc $\boxed{F(\nu) = \text{sinc}^2(\nu)}$ ce qui était prévisible.

EXERCICE 3 6

Considérons un signal f(t) ayant pour densité spectrale d'énergie la fonction $S_{ff}(\nu)$ suivante :



1) Déterminez E_f, l'énergie totale du signal f.

1 Comme $S_{ff}(\nu)$ est une densité spectrale d'énergie, il suffit d'intégrer sur $\Re$ pour obtenir l'énergie totale :

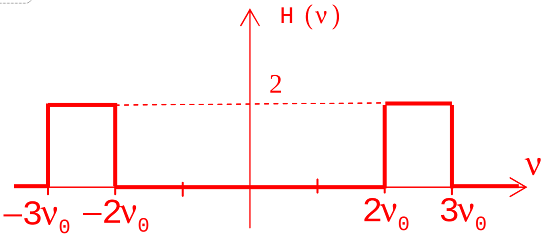
$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\nu)\, d\nu$ = l'aire sous la courbe

$E_f = \dfrac{A}{4}\, 6\nu_0 + \nu_0\, \dfrac{3A}{4}$ d'où $\boxed{E_f = \dfrac{9A\nu_0}{4}}$

Ce signal f est appliqué à l'entrée d'un filtre **<u>passe-bande</u>** idéal d'amplification 2 dont la bande passante s'étend de $-3\nu_0$ à $-2\nu_0$ et de $2\nu_0$ à $3\nu_0$. Le signal de sortie sera noté y(t).

2) Déterminez la fonction de transfert harmonique $H(\nu)$ de ce filtre idéal.

1



$$\boxed{H(\nu) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right) + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right)}$$

3) Déterminez la densité spectrale d'énergie $S_{YY}(\nu)$ du signal y(t) à la sortie du filtre.

1,5 $S_{yy}(\nu) = Y(\nu)\,Y^*(\nu) = F(\nu)\,H(\nu)\,F^*(\nu)\,H^*(\nu)$

$S_{yy}(\nu) = S_{ff}(\nu)\,|H(\nu)|^2$

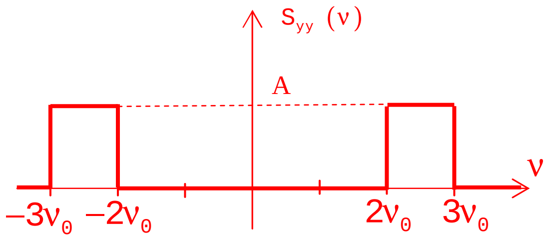
On remarque cependant que dans la bande passante du filtre idéal, $S_{ff}(\nu) = \frac{A}{4}$.

d'où $S_{yy}(\nu) = \frac{A}{4}\left[2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right) + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right)\right]^2$

$$\boxed{S_{yy}(\nu) = A\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right)\right]}$$

Représentez graphiquement $S_{YY}(\nu)$

0,5



Déterminez E_y l'énergie totale du signal y(t).

1

$$\boxed{E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\nu)\,d\nu = 2A\nu_0}$$

4) Déterminez $S_{Yf}(\nu)$, la densité spectrale d'énergie d'interaction entre y(t) et f(t).

$$S_{yf}(\nu) = Y(\nu)F^*(\nu) = F(\nu)H(\nu)F^*(\nu)$$

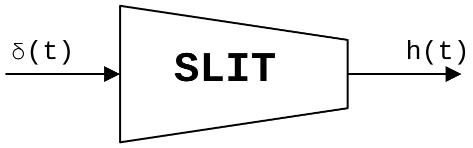
1 $$S_{yf}(\nu) = S_{ff}(\nu)H(\nu)$$

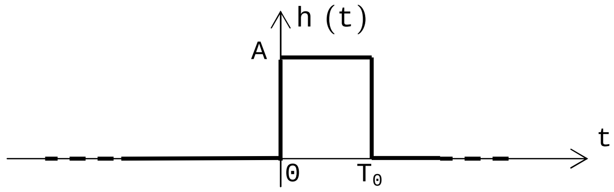
$$\boxed{S_{yf}(\nu) = S_{ff}(\nu)\left[2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right) + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right)\right]}$$

Ou $$\boxed{S_{yf}(\nu) = \frac{A}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\nu - \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\nu + \frac{5\nu_0}{2}}{\nu_0}\right)\right]}$$

EXERCICE 4 6

Considérons le SLIT qui a pour réponse impulsionnelle la fonction h(t) suivante :





1,5 **1)** Déterminez la fonction de transfert harmonique F de ce SLIT.

$$F(\nu) = H(\nu) = TF(h(t)) = TF\left(A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)\right)$$

$$F(\nu) = AT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\,e^{-j\cancel{2}\pi\nu\frac{T_0}{\cancel{2}}}$$

D'où $$\boxed{F(\nu) = AT_0\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\,e^{-j\pi\nu T_0}}$$

On applique maintenant à l'entrée de ce SLIT un signal e(t) et on s'intéresse à la réponse s(t) du système.

2) Déterminez par la méthode de votre choix l'expression de s(t) dans les cas suivants :

Pour déterminer s(t) on peut envisager d'utiliser 2 méthodes :

- Calcul direct $s(t) = e(t) * h(t)$
- En passant par la transformée de Fourier $S(\nu) = E(\nu)H(\nu)$ puis transformation inverse.

Selon le cas, l'une ou l'autre des deux méthodes peut être plus rapide.

1,5 Lorsque $e(t) = \text{rect}\left(\dfrac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)$:

$S(\nu) = E(\nu)H(\nu)$ avec $E(\nu) = T_0 \,\text{sinc}(T_0\nu)\, e^{-j\cancel{2}\pi\nu\frac{T_0}{\cancel{2}}}$

$S(\nu) = T_0 \,\text{sinc}(T_0\nu)\, e^{-j\pi\nu T_0} A T_0 \,\text{sinc}(T_0\nu)\, e^{-j\pi\nu T_0} = A T_0^2 \,\text{sinc}^2(T_0\nu)\, e^{-j2\pi\nu T_0}$

D'où $\boxed{s(t) = A T_0 \,\text{tri}\left(\dfrac{t - T_0}{T_0}\right)}$

1,5 Lorsque $e(t) = Ш_{T_0}(t)$:

Ici, le calcul direct est plus immédiat :

$s(t) = Ш_{T_0}(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) * h(t)$

$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t - nT_0) = A}$

Il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre.

1,5 Lorsque $e(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ avec $\nu_0 = \dfrac{1}{T_0}$:

Ici, une troisième méthode est possible. Il suffit de se rappeler d'une propriété des SLIT. Les exponentielles complexes sont les fonctions propres des SLIT avec pour conséquence le résultat suivant :

$e(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) \xrightarrow{\text{SLIT}} s(t) = \|H(\nu_0)\| \cos\left(2\pi\nu_0 t + \text{Arg}(H(\nu_0))\right)$

Or $H(\nu_0) = A T_0 \,\text{sinc}(T_0\nu_0)\, e^{-j\pi\nu_0 T_0} = A T_0 \,\text{sinc}(1)\, e^{-j\pi} = 0$

D'où $\boxed{s(t) = 0}$

Autre méthode :

$S(\nu) = E(\nu)H(\nu)$ avec $E(\nu) = \dfrac{1}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right)$

$S(\nu) = \dfrac{1}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right) H(\nu)$

$S(\nu) = \dfrac{1}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) H(\nu) + \delta(\nu + \nu_0) H(\nu)\right)$

$S(\nu) = \dfrac{1}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) H(\nu_0) + \delta(\nu + \nu_0) H(-\nu_0)\right)$

Or $H(\nu_0) = 0$ et $H(-\nu_0) = 0$ d'où $S(\nu) = 0$ et enfin $\boxed{s(t) = 0}$