NOM :	TRAITEMENT DU SIGNAL	Note : /21

Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Le sujet contient un formulaire en annexe.

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 (4)

Considérons le signal f(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $F(\nu)$ suivante :

$$F : \nu \to F(\nu) = AT_0 \operatorname{rect}(\nu T_0)$$

2 **1)** Déterminer E l'énergie totale du signal f(t) sans passer par le calcul de f(t).

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\nu)\, d\nu$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, F^*(\nu)\, d\nu = A^2T_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}(\nu T_0)\, d\nu = A^2T_0$$

$$\boxed{E = A^2T_0}$$

2 **2)** Retrouver E l'énergie totale du signal f(t) par une autre méthode que celle utilisée au 1).

Si $F(\nu) = AT_0 \operatorname{rect}(\nu T_0)$ alors $f(t) = A \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right)$

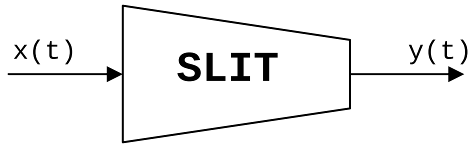
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{T_0}\right) dt \quad \text{en posant} \quad \theta = \frac{t}{T_0} \quad d\theta = \frac{dt}{T_0}$$

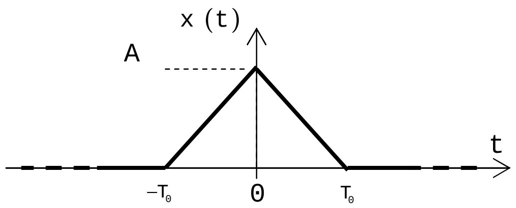
$$E = A^2T_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(\theta)\, d\theta = A^2T_0$$

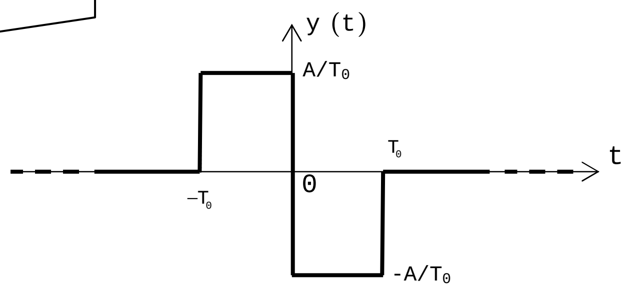
$$\boxed{E = A^2T_0}$$

EXERCICE 2 3,5

Considérons un SLIT (Système Linéaire Invariant par Translation de sa variable) transformant le signal x(t) en y(t).







3,5 **1)** Déterminez $H(\nu)$ la fonction de transfert harmonique de ce SLIT (effectuez les calculs nécessaires à la démonstration).

Il existe plusieurs méthodes pour trouver $H(\nu)$.

Méthode 1 :

Dans notre cas particulier, on peut remarquer que y(t) est la dérivée de x(t).

D'où $y(t) = \frac{dx}{dt}$ et donc $Y(\nu) = X(\nu)\, j2\pi\nu$ (théorème de la dérivation) et par conséquent $H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = j2\pi\nu$.

Méthode 2 :

Cette méthode consiste à calculer $X(\nu)$ et $Y(\nu)$ et à en déduite

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)}$$

$x(t) = A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T_0}\right)$ d'où $X(\nu) = A\,T_0\,\mathrm{sinc}^2(T_0\nu)$

$$y(t) = \frac{A}{T_0}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T_0}{2}}{T_0}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_0}{2}}{T_0}\right)\right]$$

d'où $Y(\nu) = A\ \mathrm{sinc}(T_0\nu)\left(e^{j2\pi\nu\frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi\nu\frac{T_0}{2}}\right) = 2jA\,\mathrm{sinc}(T_0\nu)\sin\left(2\pi\nu\frac{T_0}{2}\right)$

$$\text{enfin } H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{2j\cancel{A}\ \cancel{\mathrm{sinc}(T_0\nu)}\ \sin\left(2\pi\nu\frac{T_0}{2}\right)}{\cancel{A}\ T_0\,\mathrm{sinc}^{\cancel{2}}(T_0\nu)} = 2j\frac{\cancel{\sin(\pi\nu T_0)}}{\cancel{T_0}\ \cancel{\sin(\pi\nu T_0)}}\pi\nu\cancel{T_0}$$

$$\text{d'où } \boxed{H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = j2\pi\nu}$$

On reconnait ici la fonction de transfert d'un dérivateur (théorème de la dérivation).

Méthode 3 : (pour info)

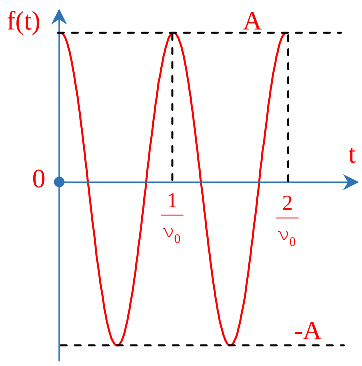
Cette méthode consiste à passer par les DSE et DSEI.

$$H(\nu) = \frac{S_{yx}(\nu)}{S_{xx}(\nu)} \quad \dots \text{ etc}$$

EXERCICE 3 2,5

Considérons le signal suivant : $f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$.

0.5 **1)** Représentez graphiquement le signal sur deux périodes à partir de 0.



2) Calculer la moyenne m(T) du signal sur l'intervalle [0,T] (attention T n'est pas la période).

1 $$m(T) = \frac{1}{T}\int_0^T A\cos(2\pi\nu_0 t)\,dt = \frac{A}{T}\left[\frac{\sin(2\pi\nu_0 t)}{2\pi\nu_0}\right]_0^T = A\frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} = A\,\mathrm{sinc}(2\nu_0 T)$$

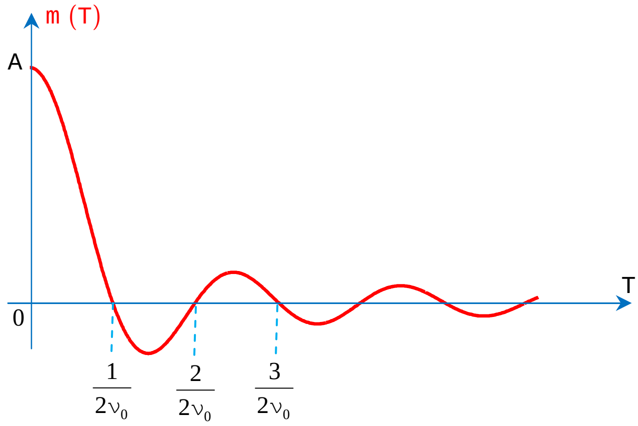
$$\boxed{m(T) = A\,\mathrm{sinc}(2\nu_0 T)}$$

Que vaut cette moyenne lorsque T tend vers l'infini ?

0.5 $$\boxed{\lim_{T\to\infty} m(T) = 0}$$

Représenter cette moyenne en fonction de T.

0.5

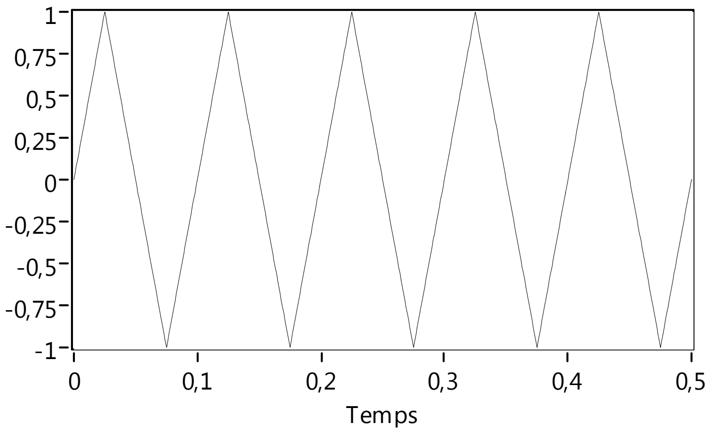


EXERCICE 4 8

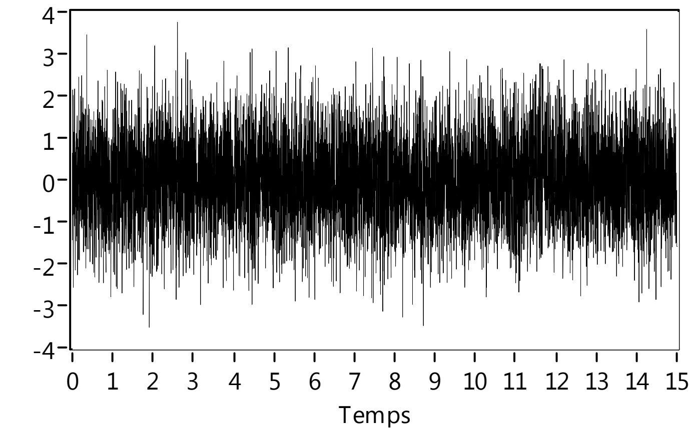
Un étudiant a réalisé l'acquisition de 6 signaux (S1 ... S6). Il a déterminé leur spectre d'amplitude (Sp1 ... Sp6) et malheureusement les a mélangés!

Les signaux

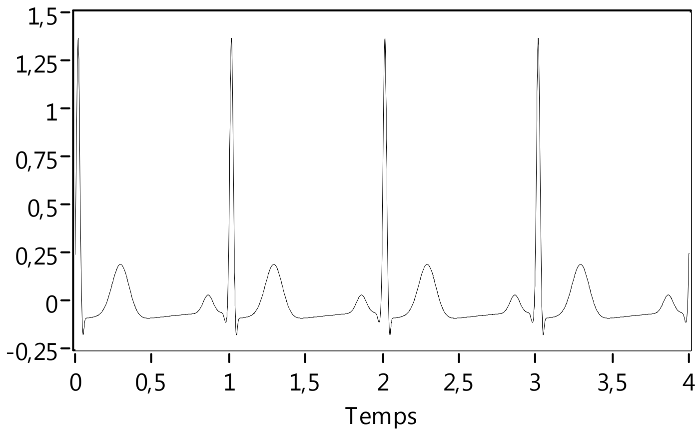
S1



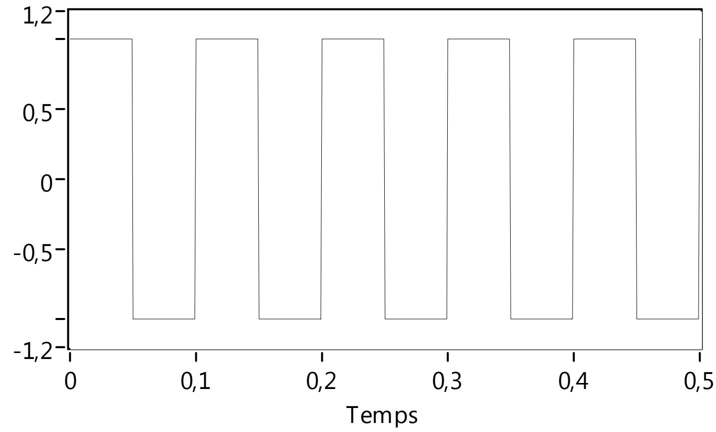
S2



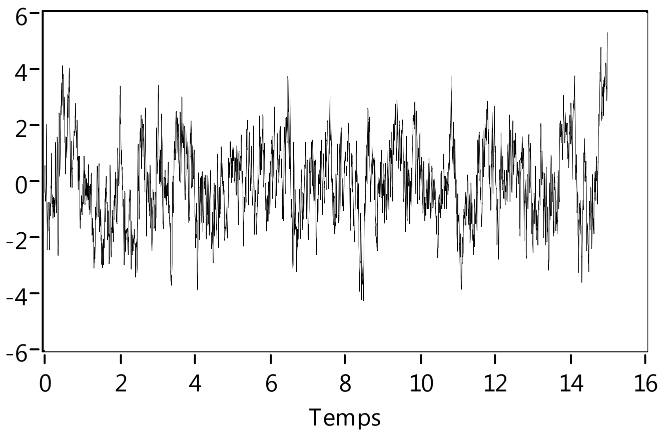
S3



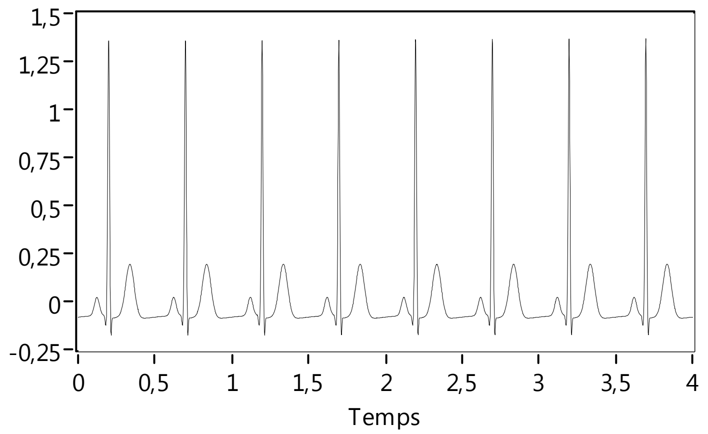
S4



S5

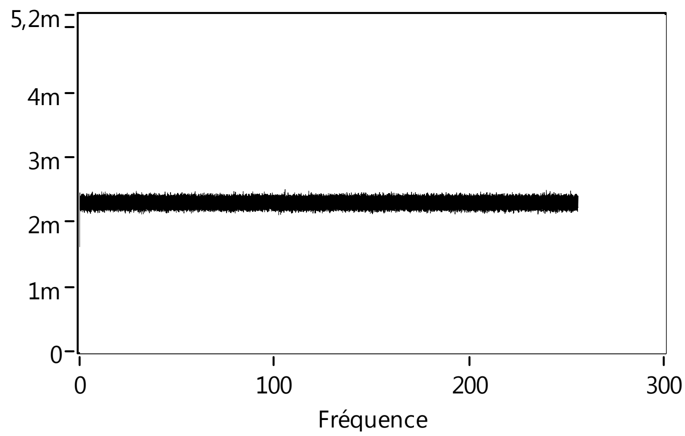


S6

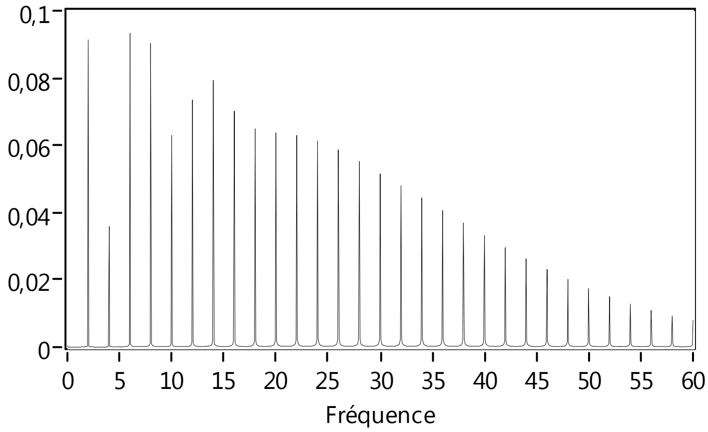


Les spectres

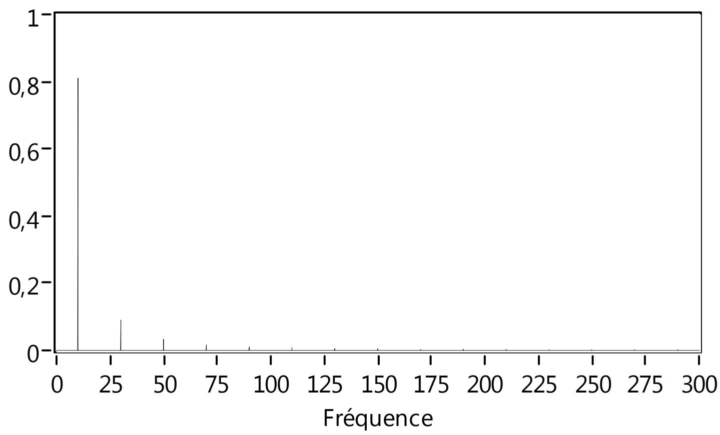
Sp1



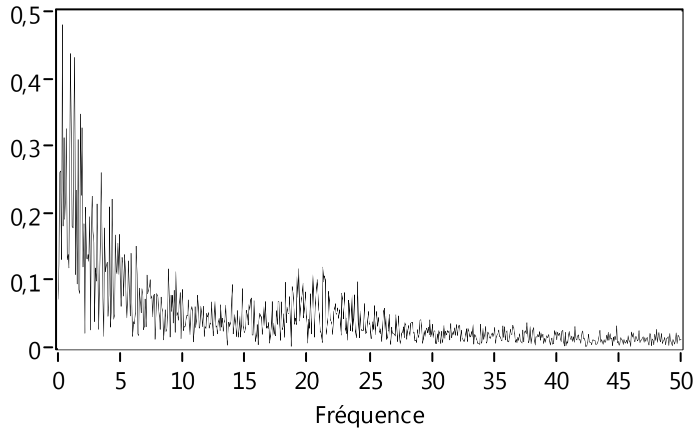
Sp2



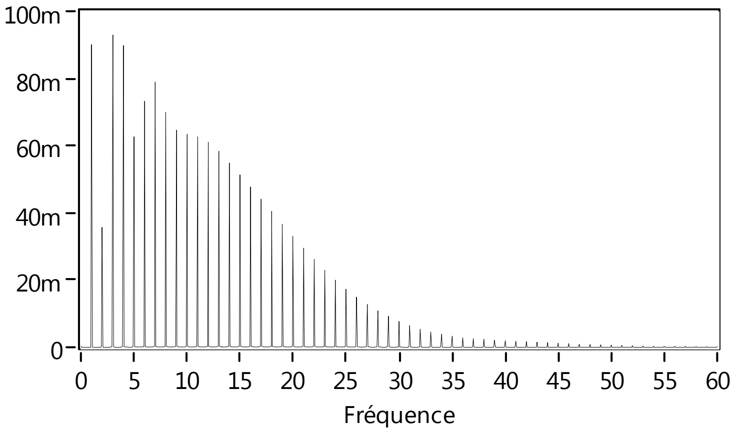
Sp3



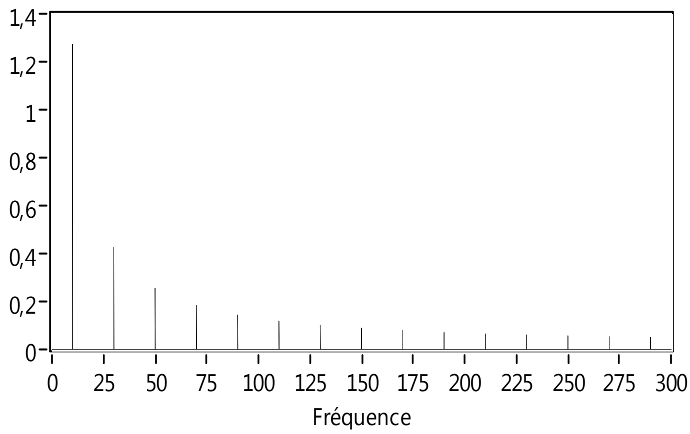
Sp4



Sp5



Sp6



6 **1)** En **argumentant** vos réponses, aidez-le à retrouver le spectre de chaque signal. (seules les explications attribueront des points).

Remarques préliminaires :
S1, S3, S4, S6 sont des signaux périodiques. Leurs spectres seront des spectres de raies. Ce qui exclut Sp1 et Sp4.

S1 et S4 ont même fréquence (10Hz) ce qui exclut Sp2 et Sp5.

Sur la même échelle de temps, on remarque que S2 semble plus « riche » que S5 dans lequel des variations importantes basses fréquences sont nettement visible.
S2 ressemble à un bruit blanc à distribution d'amplitude non uniforme (probablement gaussienne).

Signal S1 -> Spectre Sp3
Explications:
Pour les raisons énoncées en remarques préliminaires, les seuls spectres possibles sont Sp3 et Sp6.
Soit on se souvient de la décroissance harmonique du signal triangulaire en $1/f^2$ et on retient alors Sp3.
Soit on constate que la forme du triangle est l'intégrale du carré et donc le spectre du signal carré (à une constante près) sera divisé par $2\pi f$ (théorème de l'intégration de la transformée de Fourier) On retiendra alors Sp3.
Soit on remarque que le signal triangulaire et « plus proche d'une sinusoïde » que le signal carré donc son spectre est moins riche en fréquence que celui du signal carré.

Signal S2 -> Spectre Sp1
Explications:
Pour les raisons énoncées en remarques préliminaires, les seuls spectres possibles sont Sp1 et Sp4.
Sp1 étant plus riche en fréquence, il sera retenu.

Signal S3 -> Spectre SP5
Explications:
Pour les raisons énoncées en remarques préliminaires, les seuls spectres possibles sont Sp2 et Sp5.
La fréquence fondamentale permet de départager les candidats.
S3 a une fréquence d'environ 1Hz d'où le spectre Sp5.

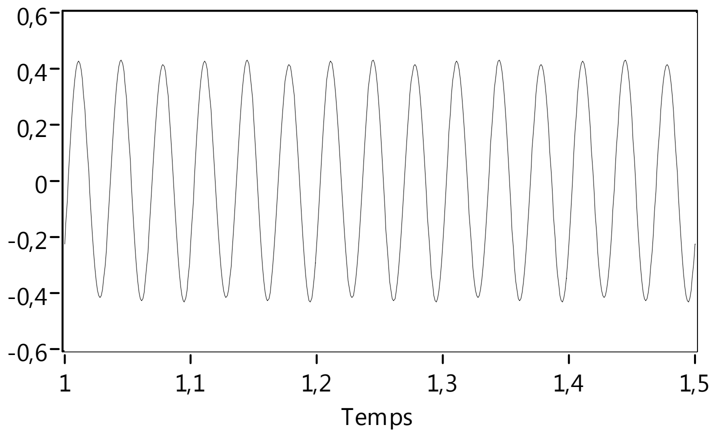
Signal S4 -> Spectre Sp6
Explications:
Pour les raisons énoncées en remarques préliminaires, les seuls spectres possibles sont Sp3 et Sp6.
Soit on se souvient de la décroissance harmonique du signal carré en $1/f$ et on retient alors Sp6.
Soit on constate que la forme du carré est la dérivée du triangle et donc le spectre du signal triangulaire (à une

constante près) sera multiplié par $2\pi f$ (théorème de la dérivation de la transformée de Fourier) On retiendra alors Sp6.
Soit on remarque que le signal carré et « moins proche d'une sinusoïde » que le signal triangulaire donc son spectre est plus riche en fréquence que celui du signal triangulaire.

Signal S5 -> Spectre Sp4
Explications:
Pour les raisons énoncées en remarques préliminaires, les seuls spectres possibles sont Sp1 et Sp4.
Sp1 étant plus riche en fréquence, il ne sera pas retenu.
Sp4 confirme la présence de basses fréquences plus importantes.

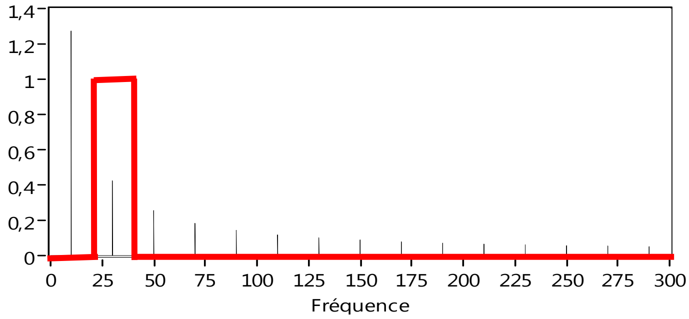
Signal S6 -> Spectre Sp2
Explications:
Pour les raisons énoncées en remarques préliminaires, les seuls spectres possibles sont Sp2 et Sp5.
La fréquence fondamentale permet de départager les candidats.
S3 a une fréquence d'environ 2Hz d'où le spectre Sp2.

2 **2)** Pour les besoins de son TP, l'étudiant a filtré le signal S4 à l'aide d'un filtre SLIT et obtenu le résultat suivant une fois le régime établi.



Quel filtrage a-t-il réalisé à votre avis (Justifier votre réponse et donnez le maximum d'information sur ce filtre)?

La forme du signal filtré semble être une sinusoïde de fréquence 30Hz.
Le filtre n'a donc retenu que l'harmonique 3 du signal carré.
Il s'agit d'un filtre passe-bande dont la bande passante est centrée sur 30Hz et les bandes coupées excluent le fondamental à 10Hz et les harmoniques supérieures ou égales à 5.



Questions de cours 3

1,5 **1)** Si $f(\theta)$ est un signal représentant un volume en m^3 en fonction d'un angle en radian, déterminez l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

$m^3 rd$

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale d'énergie de f.

$(m^3 rd)^2$

E l'énergie totale du signal f.

$m^6 rd$

1,5 **2)** .<u>En utilisant</u> la transformée de Fourier de la fonction $f : t \to f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$, déterminer la transformée de Fourier de $g : t \to g(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)$

$g(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)$ peut être considérée comme une fonction $f(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$ décalée d'un quart de période vers la droite. $g(t) = f\left(t - \frac{1}{4\nu_0}\right)$

d'où $G(\nu) = F(\nu)\, e^{-j2\pi\nu\frac{1}{4\nu_0}} = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)\right) e^{-j2\pi\nu\frac{1}{4\nu_0}}$

$$G(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0)\, e^{-j2\pi\nu\frac{1}{4\nu_0}} + \delta(\nu-\nu_0)\, e^{-j2\pi\nu\frac{1}{4\nu_0}}\right)$$

$$G(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0)\, e^{+j2\pi\cancel{\nu_0}\frac{1}{4\cancel{\nu_0}}} + \delta(\nu-\nu_0)\, e^{-j2\pi\cancel{\nu_0}\frac{1}{4\cancel{\nu_0}}}\right)$$

$$G(\nu) = \frac{A}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0)\, e^{j\frac{\pi}{2}} + \delta(\nu-\nu_0)\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\boxed{G(\nu) = A\frac{j}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0) - \delta(\nu-\nu_0)\right)}$$