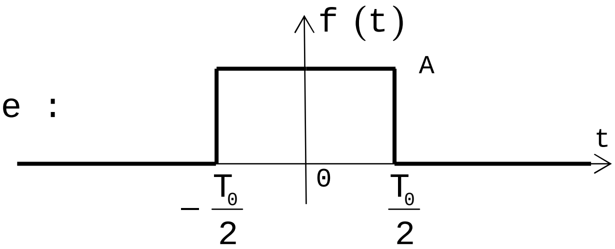
NOM :	**Correction** **TRAITEMENT DU SIGNAL**	Note : /21
Durée : 1H40. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Un formulaire de cours est fourni en annexe.		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé.

EXERCICE 1 3

Considérons la fonction f(t) suivante :



0.5 **1)** Exprimez f(t) à l'aide des fonctions usuelles.

$$\boxed{f(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)}$$

2) Déterminez la fonction $g(t) = f(t) * f(t)$ sans passer par le calcul du produit de convolution.

Il suffit de passer par la transformée de Fourier.

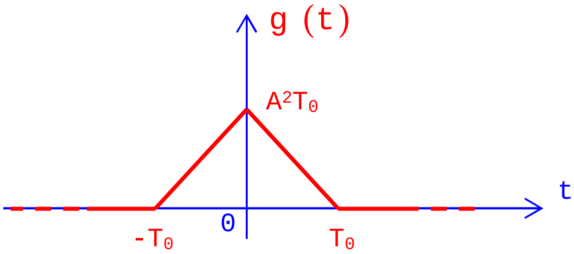
$G(\nu) = F(\nu)\,F(\nu) = \left[AT_0\,\mathrm{sinc}\,(T_0\nu)\right]^2$

2 $G(\nu) = A^2T_0^2\,\mathrm{sinc}^2\,(T_0\nu)$ d'où l'on obtient par transformée inverse

$g(t) = A^2T_0^{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{T_0}}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T_0}\right).$

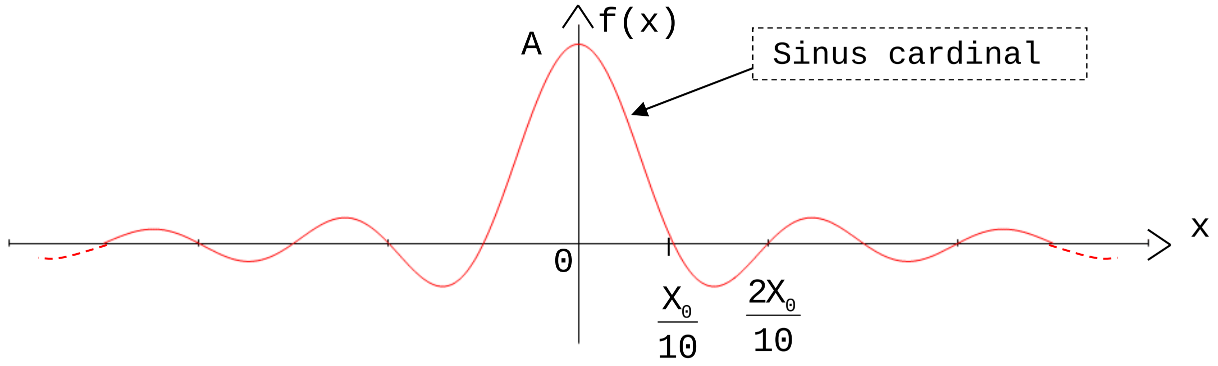
$$\boxed{g(t) = A^2T_0\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T_0}\right)}$$

0.5 Représentez graphiquement $g(t)$



EXERCICE 2 5

Considérons la fonction f(x) suivante :



1 **1)** Exprimez f(x) à l'aide des fonctions usuelles.

$$\boxed{f(x) = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{10x}{X_0}\right)}$$

Considérons maintenant la fonction g(x) constituée de la somme des motifs de f(x) répétés périodiquement à la période X_0.

2) Exprimez g(x) à l'aide des fonctions usuelles.

1
$$\boxed{g(x) = f(x) * Ш_{X_0}(x) = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{10x}{X_0}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX_0)}$$

Pour info :

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{10x}{X_0}\right) * \delta(x - nX_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{10(x - nX_0)}{X_0}\right)$$

En déduite $G(\nu)$ la transformée de Fourier de g(x).

$$g(x) = f(x) * Ш_{X_0}(x) = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{10x}{X_0}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX_0)$$

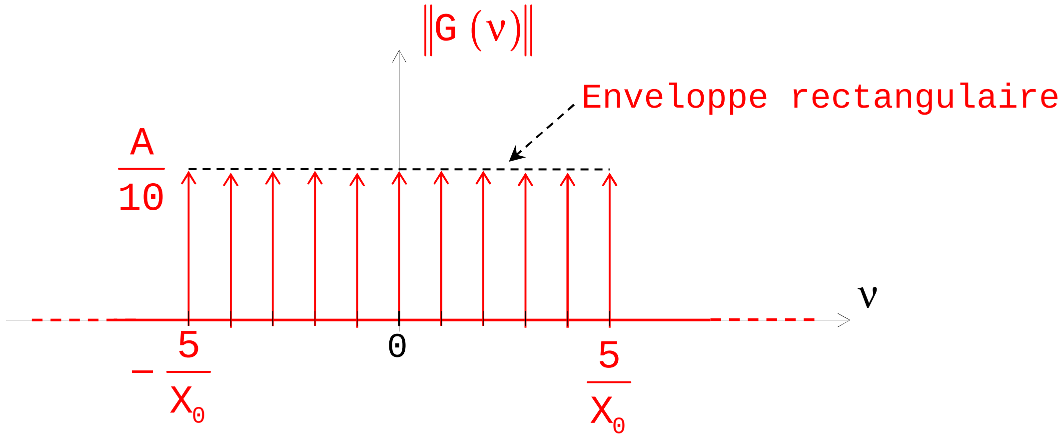
D'où

$$G(\nu) = F(\nu) \cdot \frac{1}{X_0} Ш_{\frac{1}{X_0}}(\nu) = \frac{A\cancel{X_0}}{10}\,\mathrm{rect}\left(\frac{X_0\nu}{10}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{X_0}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{X_0}\right)$$

2
$$\boxed{G(\nu) = \frac{A}{10}\,\mathrm{rect}\left(\frac{X_0\nu}{10}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{X_0}\right)}$$

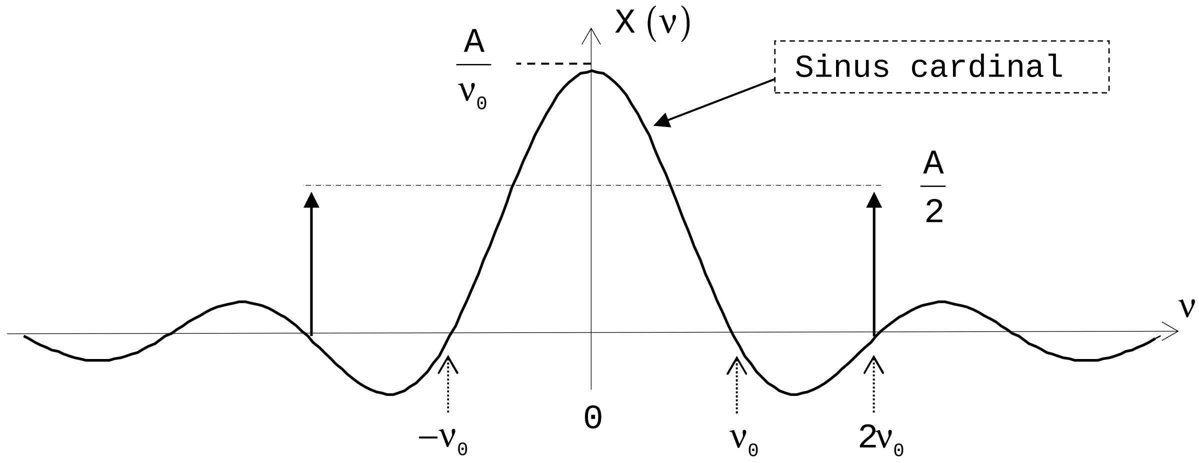
Représentez graphiquement $\|G(\nu)\|$.

1



EXERCICE 3 4

Considérons le signal x(t) qui a pour transformée de Fourier la fonction $X(\nu)$ réelle pure suivante :



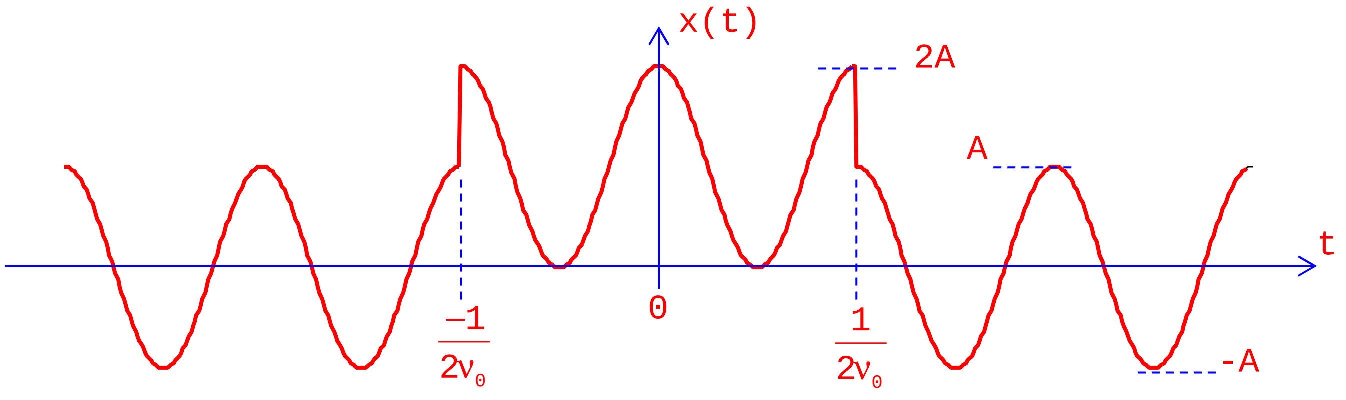
1 **1)** Exprimez mathématiquement $X(\nu)$ à l'aide des fonctions usuelles.

$$\boxed{X(\nu) = \frac{A}{\nu_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) + \frac{A}{2}\,\delta(\nu - 2\nu_0) + \frac{A}{2}\,\delta(\nu + 2\nu_0)}$$

2 **2)** A partir de $X(\nu)$, déterminez x(t).

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{rect}(\nu_0 t) + A\cos\left(2\pi(2\nu_0)\,t\right)}$$

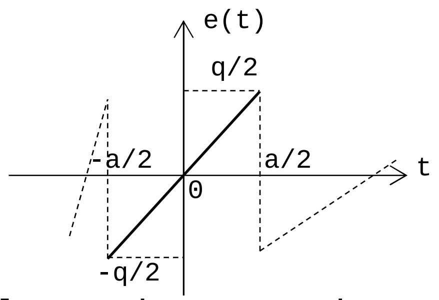
1 **3)** Représentez graphiquement x(t).



EXERCICE 4 2

Quantification d'un signal : Erreur de quantification.

Chaque fois que l'on quantifie un signal avec un quantum (q) suffisamment petit par rapport aux variations de la fonction, le signal d'erreur e(t) est composé d'une succession de motifs élémentaires assimilable à des dents de scie variant entre –q/2 et +q/2



1) Déterminer p(t), la puissance instantanée du motif élémentaire en dent de scie sur l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$?

1 $p(t) = |e(t)|^2 = \left|\frac{q}{a}t\right|^2$ d'où $\boxed{p(t) = \frac{q^2}{a^2}t^2}$

En déduire Pmoy, la puissance moyenne du motif élémentaire en dent de scie sur l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$

$$Pmoy = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{q^2}{a^2}t^2\right)dt = \frac{q^2}{3a^3}\left[t^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}$$

1 d'où $\boxed{Pmoy = \frac{q^2}{12}}$

On remarquera que Pmoy ne dépend pas de (a).

EXERCICE 5 5

Considérons les images suivantes :

Image n°1

Image n°2

Image n°3

Image n°4

Image n°5

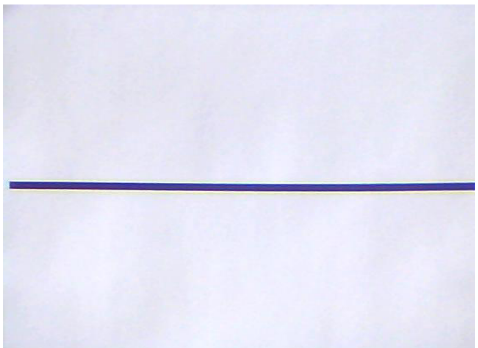


Image n°6

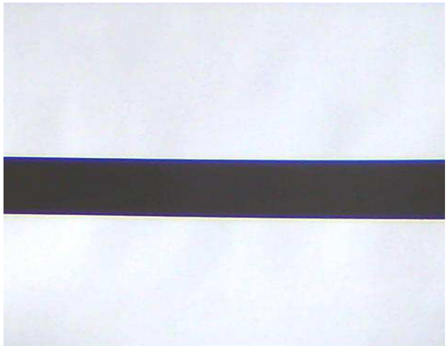
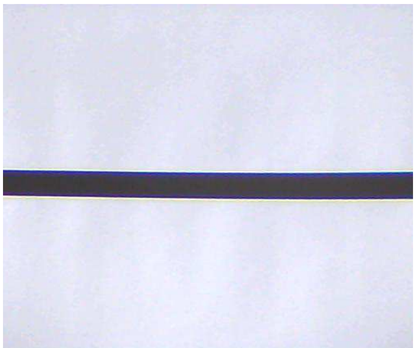
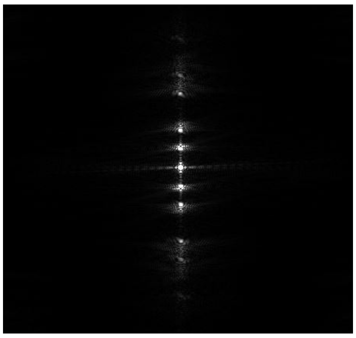


Image n°7

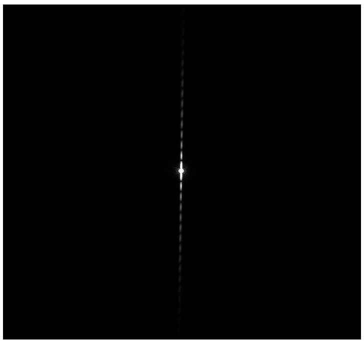


Les figures suivantes représentent le module, sous forme d'image, des transformées de Fourier (TF) des images précédentes. Elles ont cependant été mélangées :

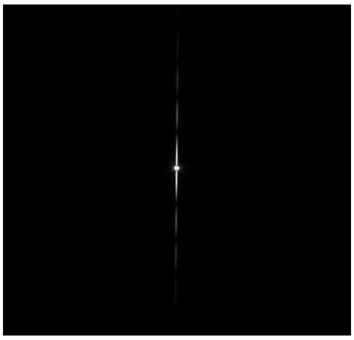
TF n°1



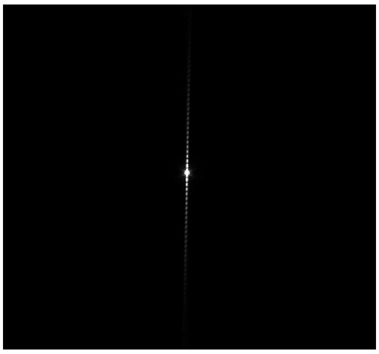
TF n°2



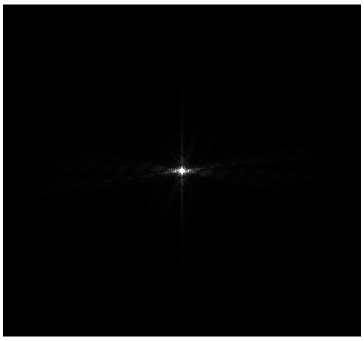
TF n°3



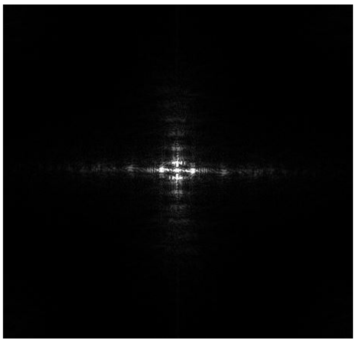
TF n°4



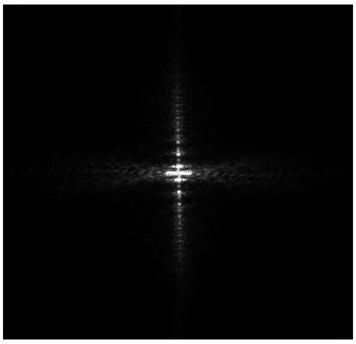
TF n°5



TF n°6



TF n°7



4 **1)** Pour chaque image, retrouvez sa transformée de Fourier. Seules les justifications argumentées compteront.

Remarques préliminaires utiles:
* Les images 1, 2, 3 et 4 sont des photos réelles. Leur spectre doit être riche.
* Les images 1, 2, et 4 présentent des périodicités. On cherchera donc des spectres de raies harmoniques selon les axes de périodicité.
* Les images 5, 6 et 7 sont des images géométriques. Elles n'ont pas de variation selon l'axe x et présentent, selon l'axe y une évolution rectangulaire. Il faut donc chercher

des spectres uniquement verticaux évoluant en |sinc|. Plus la bande noire est large, plus les passages par 0 du sinc sont rapprochés.

Image n°1 → TF n°7
Justification :
Spectre de raies harmoniques de faibles fréquences selon Y car la période selon Y est assez grande. Quelques variations selon X.

Image n°2 → TF n°6
Justification :
Présence de périodicités selon les deux axes. Fréquence plus élevée selon X que selon Y. Spectre de raies en X et Y.

Image n°3 → TF n°5
Justification :
Pas de périodicité donc pas de raies harmoniques. Image qui présente de grandes surfaces homogènes donc spectre en très basse fréquence.

Image n°4 → TF n°1
Justification :
Périodicité courte selon Y donc spectre de raies harmoniques de plus grandes fréquences. Image « relativement » constante selon X donc spectre proche de 0 en X

Image n°5 → TF n°3
Justification :
Image constante en X donc spectre proche de 0 en X.
Bande fine en Y à variation rectangulaire donc spectre en |sinc| en Y avec périodicité des passages par zéro à des fréquences plus élevées que pour les autres bandes.

Image n°6 → TF n°4
Justification :
Même principe de raisonnement que pour l'image 5. Ici la bande est large donc les passages par 0 du spectre seront rapprochés.

Image n°7 → TF n°2
Justification :
Idem images 5 et 6

1 **2)** Que serait la transformée de Fourier d'une image totalement blanche ? Quelle allure aurait la représentation en image de son module ?

Une image uniformément blanche est une fonction constante à deux variables. Sa transformée de Fourier est un Dirac en 0 selon les deux fréquences spatiales. La représentation de son module sous forme d'image sera une image noire avec au centre un point blanc.

Questions de cours 2

2 **1)** Si f(x) est un signal représentant une surface en m^2 en fonction d'une tension en volts, déterminez l'unité de chacune des grandeurs suivantes :

$F(\nu)$ la transformée de Fourier de f.

m^2V

$S_{ff}(\nu)$ la densité spectrale d'énergie de f.

$(m^2V)^2$

E l'énergie totale du signal f.

m^4V

P la puissance du signal f.

m^4