NOM : .... PRENOM :	**Examen Partiel 1** **SY53** **CORRIGE**	Salle P305 07/05/2024
Durée : **1H30**. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé (formulaire annexé). Téléphone portable interdit *(Durée 2h pour les personnes disposant d'un tiers temps supplémentaire)*		

Exercice 1 :

1. Calculer l'amplitude crête de la dérivée d'un signal sinusoïdal d'amplitude égale à 1 et de fréquence 2 Hertz (phase à l'origine nulle).

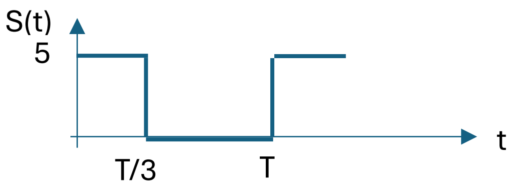
$x(t) = \sin(2\pi f t)$

$\frac{dx(t)}{dt} = (2\pi f).\cos(2\pi f t)$

AN : X_{max} = $(2\pi f)$ = 4π (valeur crête)

Exercice 2 :

1. Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal carré s(t), compris entre 0 et 5V, de rapport cyclique α=1/3.



$< s > = \frac{1}{T}\left(5.\frac{T}{3}\right) = \frac{5}{3}$

$S_{eff} = \sqrt{< s^2(t) >}$

$S_{eff} = \sqrt{\frac{25}{T}.\frac{T}{3}} = 5\sqrt{\frac{1}{3}}$=2.88v

2. Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal sinusoïdal définit par : s(t) = 2.cos (ωt + ϕ) + 2

Il s'agit d'un signal composite

$$< s > = 2$$
$$s^2(t) = \frac{4}{2}(1 + \cos(2(\omega t + \varphi) + 4 + 8\cos(\omega t + \varphi))$$
$$< s^2(t) > = \frac{4}{2}(1) + 4 = 6$$
$$S_{eff} = \sqrt{< s^2(t) >} = \sqrt{6}$$

Exercice 3 :

1. Calculer la fonction d'autocorrélation du signal sinusoïdal x(t) = A sin(ωt)

$$\text{Rxx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$$

$$\text{Rxx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\sin(\omega t).A\sin(\omega t - \omega\tau)dt$$

$$\text{Rxx}(\tau) = \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}[\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t - \omega\tau)].dt$$

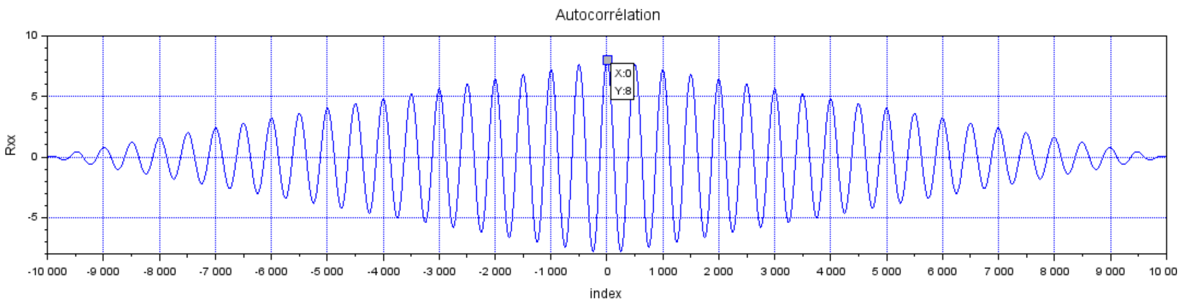
$$\text{Rxx}(\tau) = \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}[\cos(\omega\tau)].dt$$

$$\text{Rxx}(\tau) = \frac{A^2}{2T}\cos(\omega\tau).[t]_{-T/2}^{T/2}$$

$$\text{Rxx}(\tau) = \frac{A^2}{2T}\cos(\omega\tau)T$$

$$\text{Rxx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

2. Tracer Rxx(τ)



Tracé avec Scilab (A=4)

3. Déduire de la fonction d'autocorrélation la puissance moyenne P du signal s

$$\text{P} = \text{Rxx}(0) = \frac{A^2}{2} \; (facilement\ vérifiable\ par\ le\ th. de Parseval)$$

Exercice 4 :

Considérant le signal x (t) = 2 + sin ($2\pi f_0 t$) + 0.25cos ($6\pi f_0 t$)

1. Écrire x (t) sous forme d'un développement en série Fourier en cosinus et en complexe

✓ Forme cosinus

$$x(t) = 2 + \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.25.\cos\left(6\pi f_0 t\right)$$

✓ Forme complexe

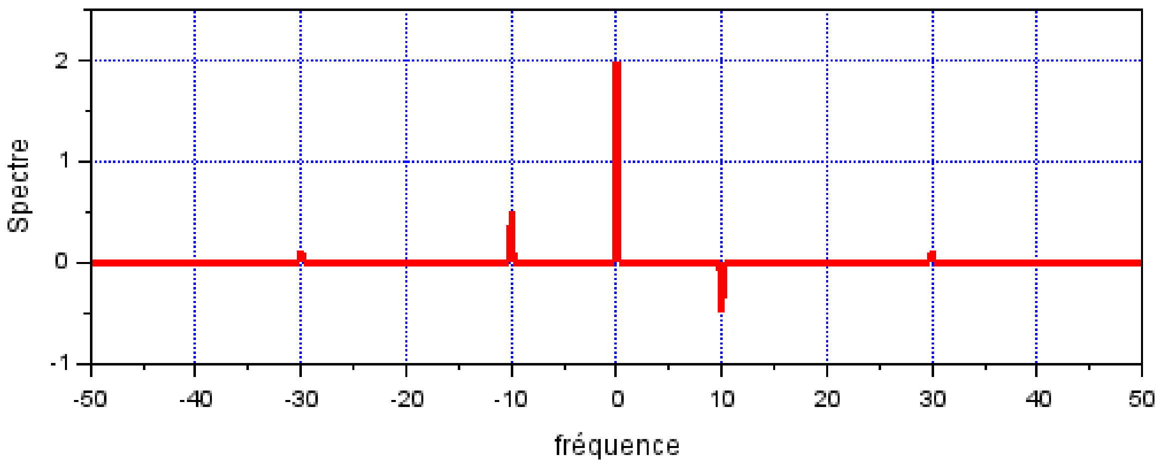
$$x(t) = 2 + \frac{e^{j\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}}{2} + \frac{e^{j(6\pi f_0 t)} + e^{-j(6\pi f_0 t)}}{8}$$

2. Donner les composantes spectrales dans les deux représentations : {Ak, αk} {X (jk)}

$A_0 = 2\ ;\ A_1 = 1\ ;\ \ A_3 = 0.25$

$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}\ ;\ \ \alpha_3 = 0$

$X(0) = 2\ ;\ X(-1j) = 0.5j\ ;\ X(1j) = -0.5j\ \ ;\ X(3j) = X(-3j) = \ 0.125$



(Tracé avec Scilab ; f0=10Hz)

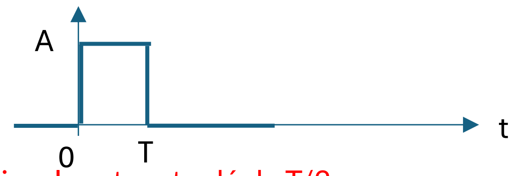
3. Vérifier que la puissance de ce signal calculée à l'aide des deux représentations donne le même résultat.

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + A_3^2) = 4 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{16}\right) = \frac{145}{32} = 4.53\ [Unité^2]$$

$$P = |X(-3j)|^2 + |X(-j)|^2 + \ |X(0)|^2 + \ |X(j)|^2 + \ |X(3j)|^2 = \frac{145}{32} = 4.53\ [Unité^2]$$

Exercice 5 :

1. Calculer la TF du signal « porte » défini par : x(t) =A.rect ((t-T/2)/T)

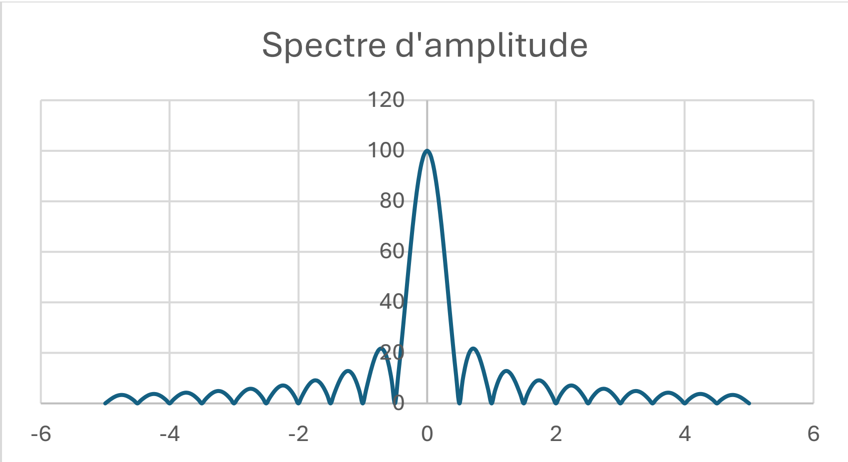


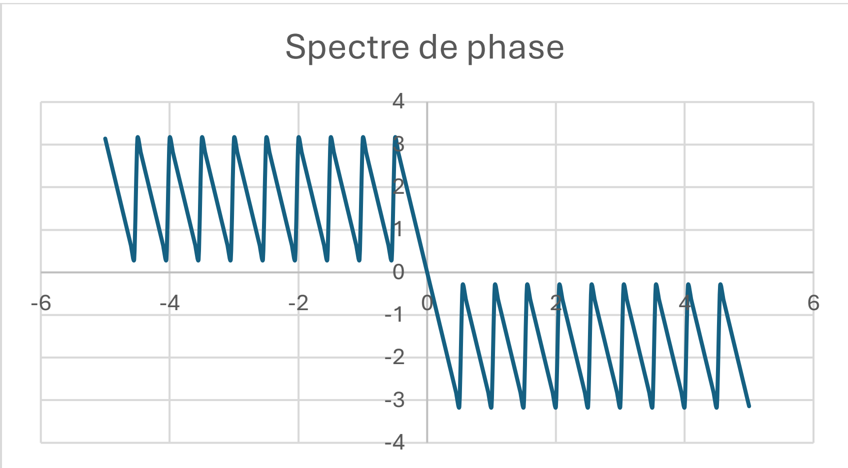
Signal porte retardé de T/2

$$X(jf) = ATsinc(\pi fT).e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = ATsinc(\pi fT).e^{-j\pi fT}$$

2. Représenter son spectre d'amplitude et son spectre de phase.

Soit A=5, T=2s (tracé avec Excel)





3. Donner sa densité spectrale d'énergie (DSE).

$$DSE = |X(jf)|^2 = A^2T^2sinc^2(\pi fT)$$

4. En déduire l'énergie totale (faire appel aux propriétés sur le sinus cardinal)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |X(jf)|^2\, df = \int_{-\infty}^{\infty} A^2T^2sinc^2(\pi fT)df$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |X(jf)|^2\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2T^2}{\pi T} sinc^2(\theta) d\theta$$

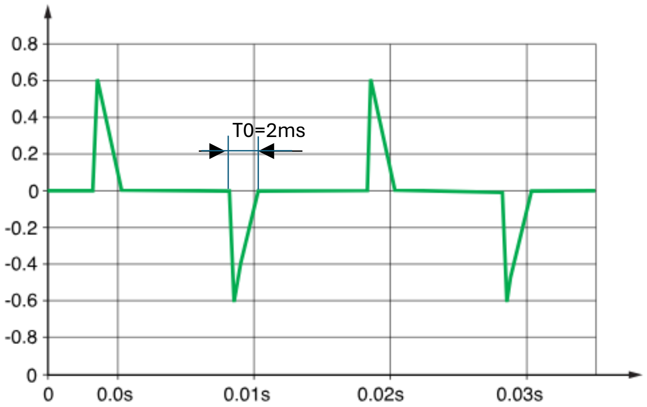
Avec :

$$d\theta = \pi T df$$

$$W = \frac{A^2T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(\theta) d\theta = A^2T$$

Exercice 6 :

On alimente une lampe fluocompacte par une tension (230V/50Hz). On relève le courant absorbé i(t) par cette lampe (voir ci-dessous)



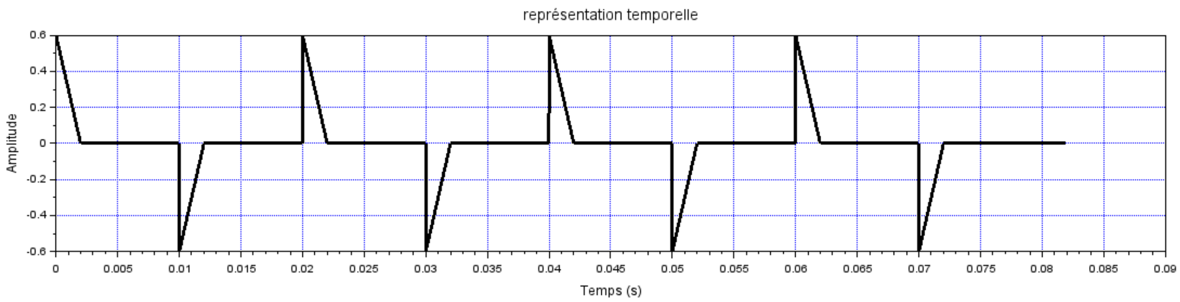
1. Donner la période T ainsi que la valeur moyenne de ce signal i(t)

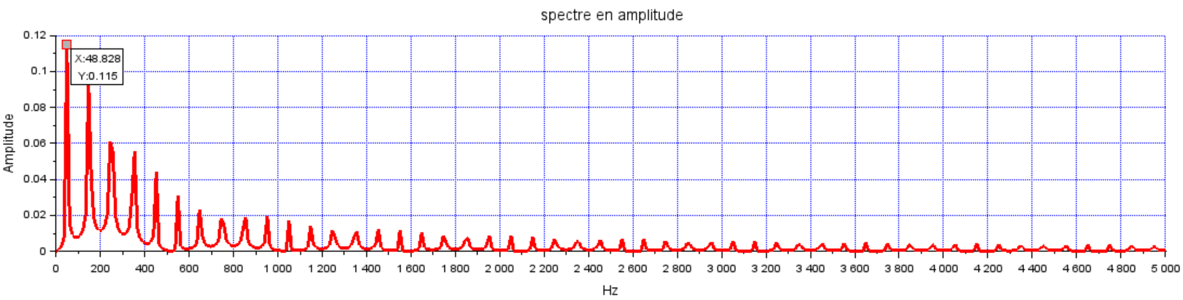
$$T = 20ms$$

<i(t)>=0

2. Exprimer i(t) à partir de fonctions usuelles de type « porte » et « triangle ».

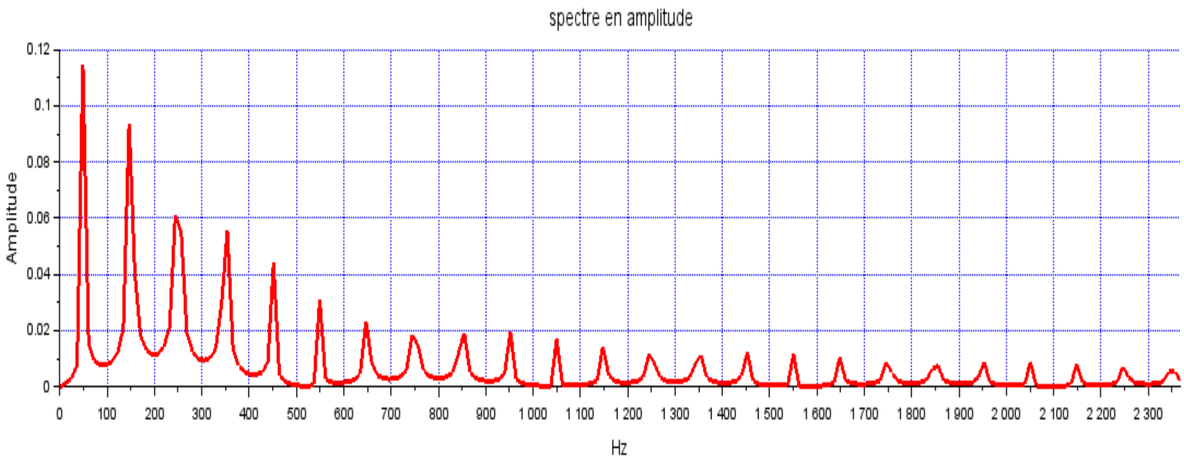
(Tracé sur Scilab)





$$i(t) = 0.6.\sum_{k=0}^{\infty}[tri(t-kT).porte\left(t-kT-\frac{T0}{2}\right) - tri\left(t-kT-\frac{T}{2}\right).porte(t-kT-\frac{T}{2}-\frac{T0}{2}]$$

La valeur efficace de ce signal est fournie par un appareil RMS et vaut 0.16A. Le spectre d'amplitude est obtenu expérimentalement par un analyseur de spectre. Il est fourni ci-après.



3. Calculer le facteur de crête ainsi que le taux de distorsion harmonique (THD) en exploitant le spectre ci-dessus (spectre en valeurs crêtes)

$$Fc = \frac{I_{crête}}{I_{eff}} = \frac{0.6}{0.16} = 3.6$$

$$THD = \frac{\sqrt{X_{eff}{}^2 - X_1^2}}{X_1} = \frac{\sqrt{0.16^2 - 0.0813^2}}{0.0813} = 1.69\ (169\%)$$