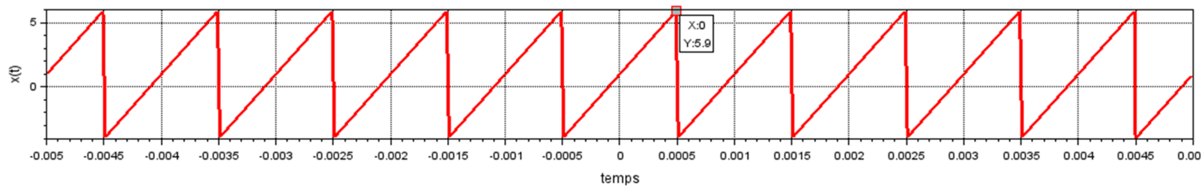
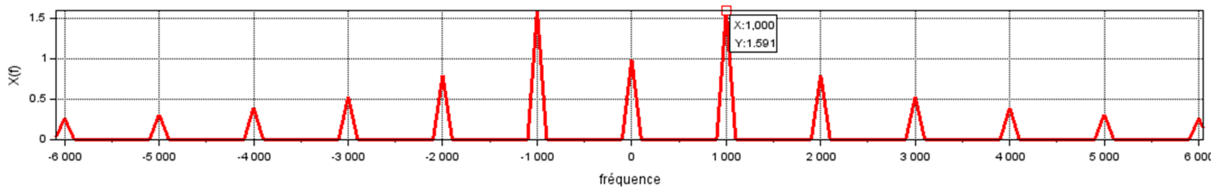
| NOM : ……………………………… PRENOM : ……………………………… | **CORRIGE** Examen Partiel 2 SY53 | Salle P305 19/06/2024 8h00 |
|---|---|---|
| Durée : **1H30**. Calculatrice autorisée. Aucun document (formulaire annexé). *(Durée 2h pour les personnes disposant d'un tiers temps supplémentaire)* | | |

## Partie 1 : SLIT (filtrage analogique)

**Exercice 1**

Soit le signal en dents de scie associé à son spectre bilatéral en amplitude ci-dessous :




1. Le spectre |X(f)| est un spectre de raies. Justifier cette affirmation.

Il s'agit d'un spectre de raies car le signal est périodique.

2. On souhaite isoler uniquement le fondamental de ce spectre. Proposer alors un type de filtre analogique d'ordre 2 et donner ses principales caractéristiques (gain max., bande passante, …).

Pour isoler le fondamental seul (1kHz), il faut filtrer le signal par un filtre analogique passe-bande centré sur $f_0$=1kHz et de gain 0dB à cette fréquence $f_0$. La bande passante sera choisie la plus étroite possible (dans le cas où la synthèse est libre)

3. Pour synthétiser une fonction de transfert de ce filtre d'ordre 2, on va associer deux filtres d'ordre 1. Caractériser totalement ce filtre (gain statique, fréquence particulière) en exprimant sa fonction de transfert.

En cascadant un filtre passe-bas d'ordre 1 avec un filtre passe-haut d'ordre 1, on arrive à synthétiser un filtre d'ordre 2 de type passe-bande. La bande passante ne sera pas très étroite avec la contrainte imposée.

$$H(p) = \frac{A}{(1+\tau p)} . \frac{\tau p}{(1+\tau p)} = A \frac{\tau p}{(1+2\tau p + \tau^2 p^2)}$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

A à calculer pour avoir 0dB à $f_0$

Effectivement, on remarque qu'à la fréquence centrale, il y a une atténuation de 6dB. On veillera donc à mettre une amplification d'un facteur 2.

$$H(p) = 2.\frac{1{,}59.10^{-4}p}{(1 + 3{,}18.10^{-4}p + 2{,}53.10^{-8}p^2)}$$

## Exercice 2

Un filtre analogique présente une fonction de transfert exprimée par :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2}$$

1. Calculer les pôles de ce filtre. Conclure sur la stabilité de ce filtre.

$p_1$=-1 et $p_2$=-2 (deux pôles réels négatifs) donc le filtre est stable

2. Exprimez le module de la réponse fréquentielle harmonique |H(jω)| de ce filtre.

$$|H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 9\omega^2}}$$

3. Calculez le gain |G| en dB pour ω = 0, 0.5, 1, 2, 4 rad/s et pour ω-> ∞

| ω | \|G\| |
|---|---|
| 0 | 0,00 |
| 0,5 | -1,23 |
| 1 | -3,98 |
| 2 | -10,00 |
| 4 | -19,29 |
| ∞ | -∞ |

4. Quelle est la nature de ce filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande) ?

C'est un filtre passe-bas du second ordre

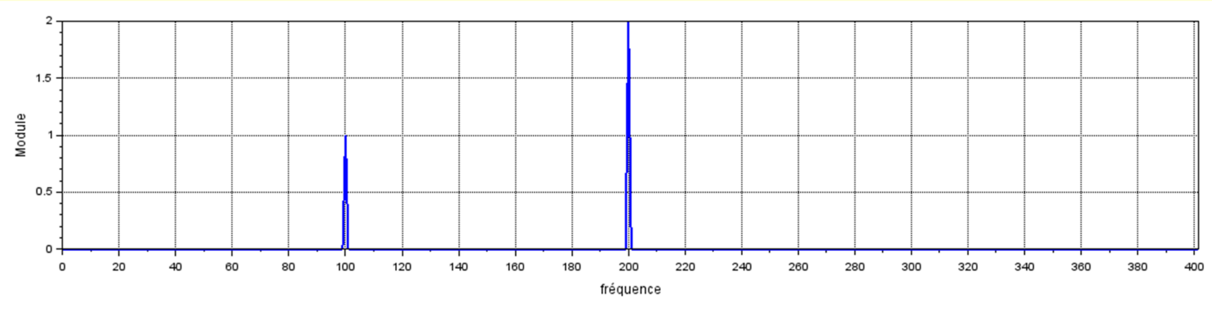
## Exercice 3

On souhaite émettre un signal BF x(t) par voie Hertzienne dont on donne l'équation horaire :
$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2\sin(2\pi f_2 t)$, avec $f_1$ =100 Hz et $f_2$ =200 Hz

1. Donnez la décomposition en série de Fourier de x(t) sous forme de cosinus.

$x(t)= \cos(2\pi f_1 t) + 2\cos(2\pi f_2 t-\pi/2)$

2. Représentez le spectre unilatéral en amplitude de x(t), noté |X(f)|



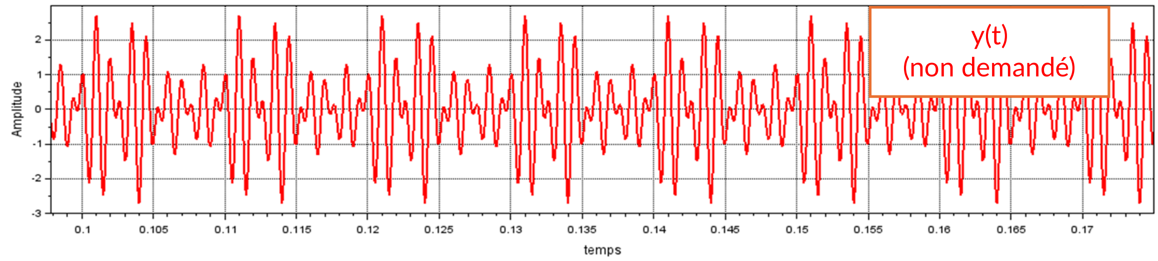

On module une porteuse $f_0$=1000 Hz en amplitude par x(t). Pour cela, on effectue le produit de la porteuse par x. On note $y(t) = x(t).\cos(2\pi f_0 t)$) le signal modulé.

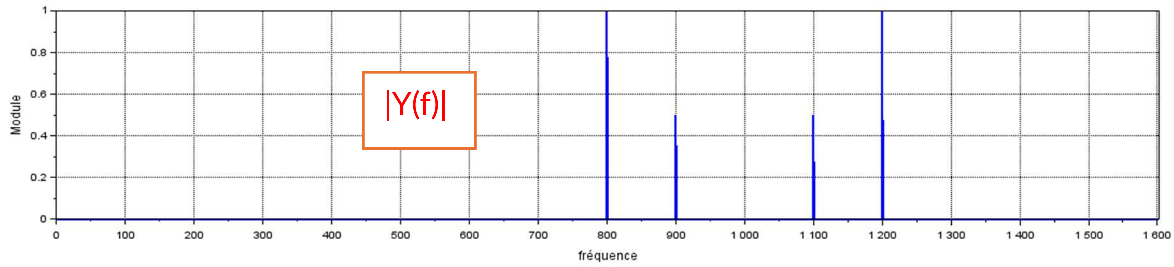
3. Que vaut Y(f) ?

$Y(f) = X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ (produit de convolution)

$Y(f) = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$

4. Tracer le spectre |Y(f)| de y(t).

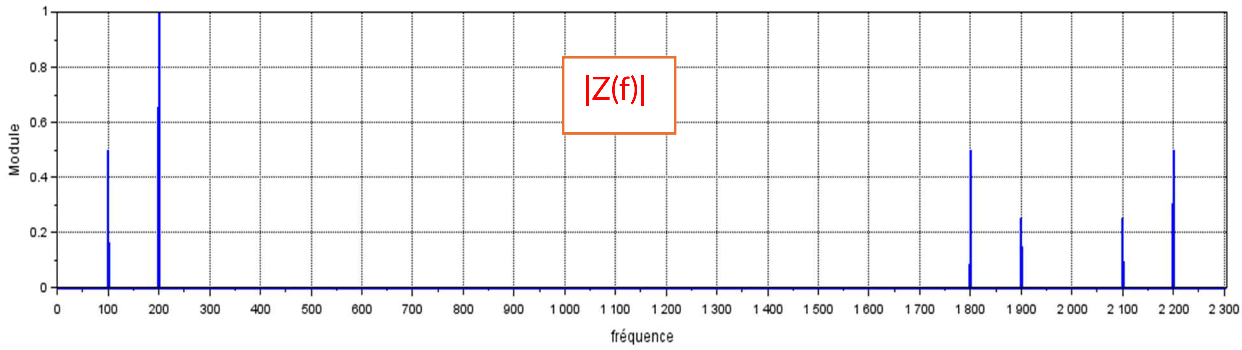



La modulation introduit une transposition en fréquence du spectre de x(t) autour de la fréquence de la porteuse ($f_0$=1000Hz). |Y(f)| est le spectre du signal transmis par voie Hertzienne.
La porteuse n'est pas transmise avec ce type de modulation.

A la réception, du signal, on effectue une démodulation par détection synchrone qui consiste à multiplier y(t) par la porteuse cos(2π$f_0$t) et en filtrant le signal résultant z(t) par un filtre passe bas.

5. Tracez le spectre unilatéral |Z(f)| du signal z(t) ?




Pour info. :

$$Z(f) = Y(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$Z(f) = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)] * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$Z(f) = \frac{1}{4}[X(f - 2f_0) + X(f) + X(f) + X(f + 2f_0)]$$

$$Z(f) = \frac{1}{4}[X(f - 2f_0) + X(f + 2f_0)] + \frac{1}{2}X(f)$$

(Pour retrouver x(t), il va falloir filtrer au-delà de 200Hz et apporter une amplification de 2)

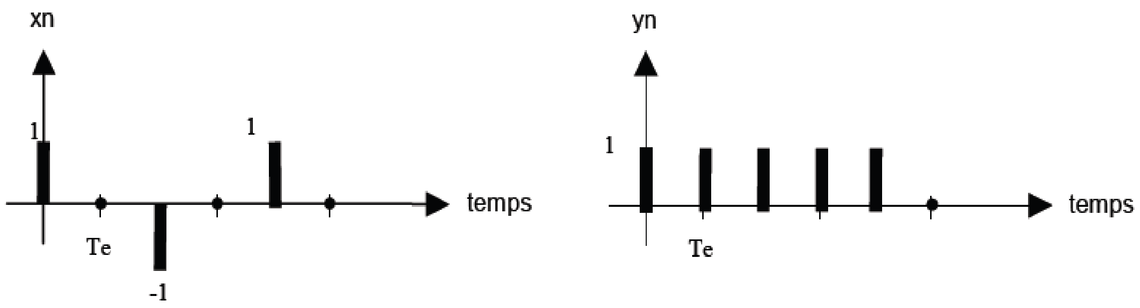
6. Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour récupérer le spectre du signal modulant x(t) ?

On peut prendre $f_c$=400Hz

## Partie 2 : SLIT (filtrage numérique)

### <u>Exercice 4</u>

1. Parmi les propositions suivantes, retrouvez la transformée en z des deux signaux échantillonnés suivants (cochez une des cases vrai ou faux) :




| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| a) la transformée s'écrit : $X(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2}$ | ☐ | ☒ |
| b) la transformée s'écrit : $X(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4}$ | ☒ | ☐ |
| c) la transformée s'écrit : $Y(z) = 1 + 5z^{-1}$ | ☐ | ☒ |
| d) la transformée s'écrit : $Y(z) = 1 + z^{-1} + .... + z^{-4}$ | ☒ | ☐ |

2. Un filtre numérique est caractérisé par la récurrence : $\mathbf{y_n = 0.8y_{n-1} + 0.2x_{n-1}}$

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| a) sa transmittance s'écrit : H(z) = 0.2.z / (z-0.8) | ☐ | ☒ |
| b) ce filtre est stable | ☒ | ☐ |
| c) sa transmittance en continu est égale à -1 | ☐ | ☒ |
| d) c'est un filtre RIF (non récursif) | ☐ | ☒ |

### <u>Exercice 5</u>

On effectue la synthèse d'un filtre passe-haut d'ordre 1 par la méthode de l'invariance fréquentielle (transformation bilinéaire ou méthode de Tustin).
On note *Te* la période d'échantillonnage.
On rappelle également l'expression d'un filtre passe-haut analogique d'ordre 1 :

$$H(p) = \frac{Tp}{1+Tp}$$

Avec T : constante de temps (s)

1. Établir l'expression de la fonction de transfert de H(z) en utilisant la transformation suivante.

$$p = \frac{2}{Te}\frac{z-1}{z+1}$$

On posera : $\alpha = 2T/T_e$

$$H(z) = \frac{\alpha(z-1)}{z(1+\alpha)+(1-\alpha)}$$

2. Écrire la récurrence sous la forme : $y_n = a_0.y_{n-1}+b_0.(x_n - x_{n-1})$ en explicitant les coefficients ($a_0$ et $b_0$) en fonction de α.

$$y_n = \frac{(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)} y_{n-1} + \frac{\alpha}{(\alpha + 1)}(x_n - x_{n-1})$$

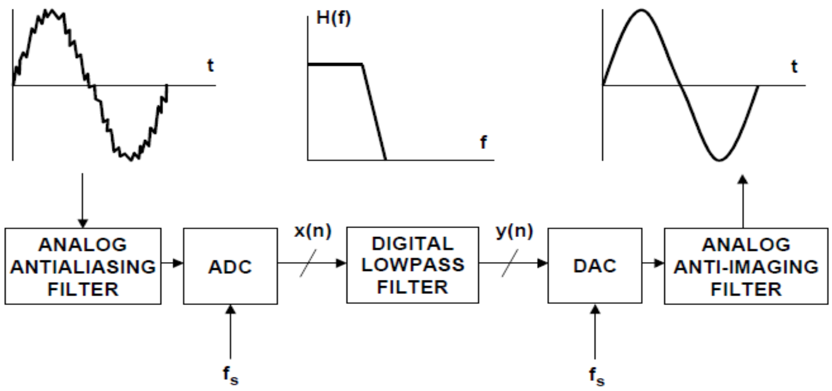
$$y_n = a_0 y_{n-1} + b_0(x_n - x_{n-1})$$

Avec :

$a_0 = \frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)}$ et $b_0 = \frac{\alpha}{(\alpha+1)}$

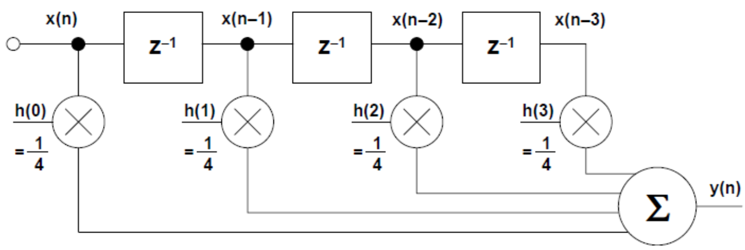
## Exercice 6

1. Sur la chaîne de traitement suivant, quel est le rôle du filtre analogique en entrée de traitement ? Développez




C'est un filtre anti-repliement destiné à borner le spectre du signal à échantillonner. Cela permet de limiter (lorsque sa fréquence de coupure est égale à fe/2 : fréquence de Nyquist) voire d'annuler le repliement de spectre.

A partir du design du filtre suivant :




1. Écrire la récurrence de ce filtre.

$y_n = h(0).x_n + h(1).x_{n-1} + h(2).x_{n-2} + h(3).x_{n-3}$

$$y_n = \frac{(x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3})}{4}$$

2. Comment nomme-t-on un tel filtre ?

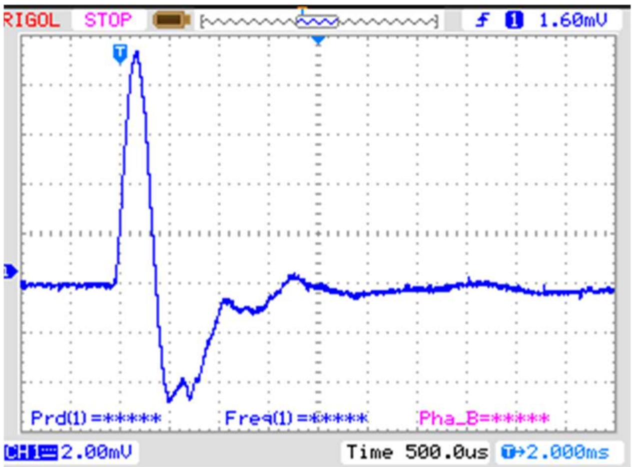
C'est un filtre à moyenne glissante (filtre FIR)

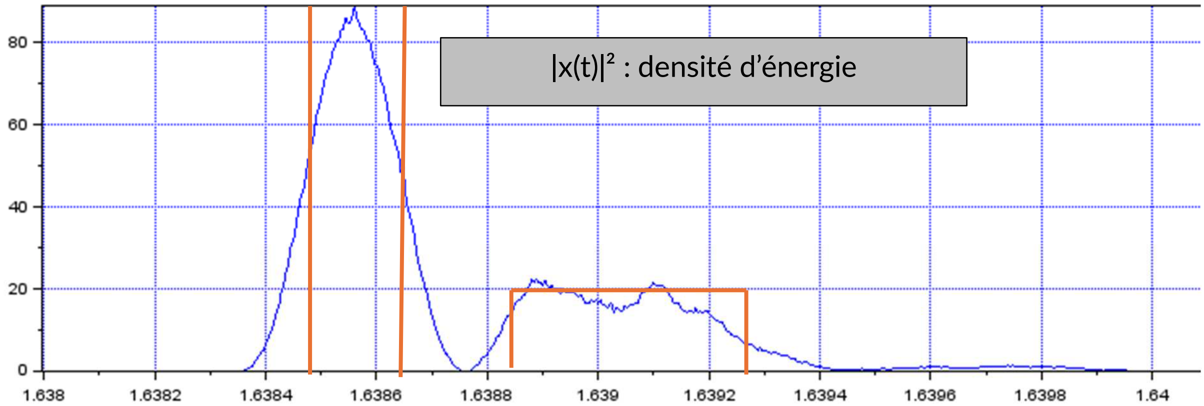
## Partie 3 : Analyse de signaux

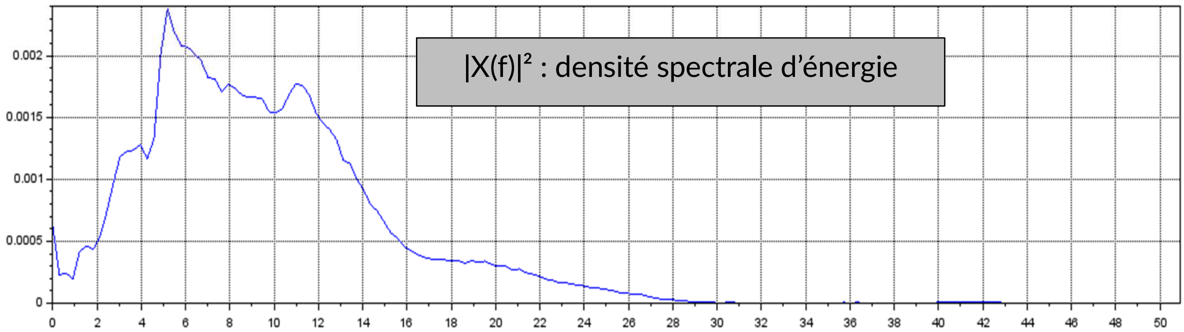
Exercice 7 :

On donne ci-dessous la réponse à un choc (choc sur une table en salle P307) mesuré à l'aide d'un accéléromètre de sensibilité 10mV/g.

On souhaite faire une analyse de traitement du signal. Pour cela, on trace sur Scilab $|x(t)|^2$ et $|X(f)|^2$




1. Evaluer l'énergie contenue dans ce choc
   W = (1.63865-1.63848).50 +(1.63926-1.63883).20 = **0.022 V²**
   (W = 0.025V²; valeur donnée par Scilab)
   L'énergie peut aussi être évaluée à partir de la DSE (Th. Parseval)

2. Est-ce que ce choc peut correspondre à un régime percutionnel aux vues des représentations ci-dessus ?

Non car la DSE serait uniforme et constante sur toutes les fréquences.

Exercice 8 :

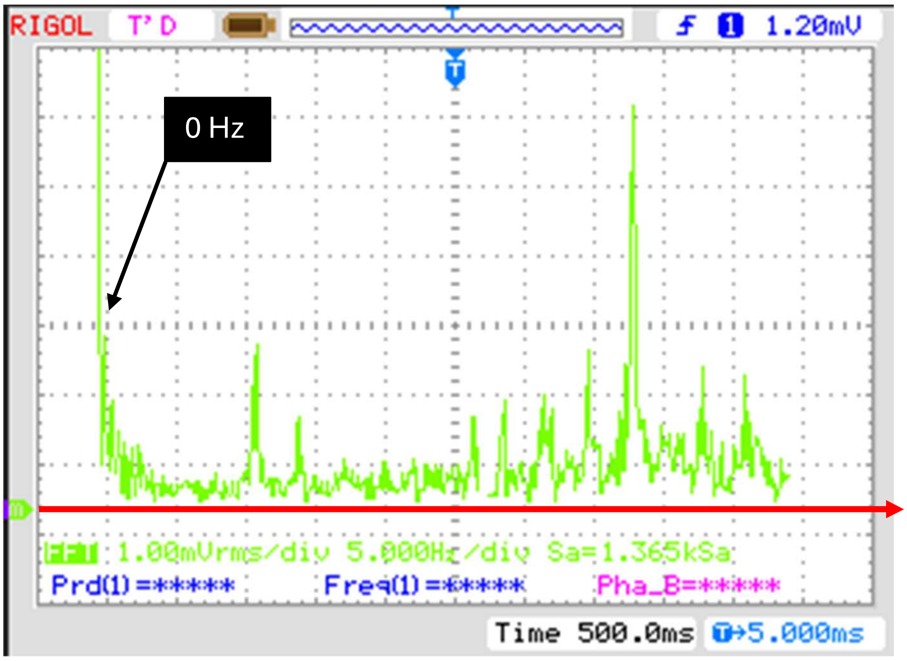
On se propose de réaliser une analyse vibratoire d'une petite « machine tournante » (ventilateur dont il manque deux pâles sur sept). Le ventilateur est instrumenté avec un accéléromètre de sensibilité 3.3mV/g.

Concernant le ventilateur :

- A tension nulle, le ventilateur ne tourne pas (évident).
- A tension nominale 12V, le ventilateur tourne à 3200 trs/min.

La caractéristique statique liant la vitesse à la tension d'alimentation est une droite.

Le spectre obtenu avec un oscilloscope (qui n'est pas un analyseur de spectre de grande précision) est le suivant.




Il permet de repérer le balourd généré par l'absence de deux pâles. On rappelle également qu'un balourd radial sur une ligne d'arbre en rotation à $f_0$ fait apparaître des composantes spectrales à $f_0$, $2f_0$, etc…

1. Retrouver la vitesse de rotation du ventilateur ainsi que la tension de commande de celui-ci.

D'après le spectre, on lit environ 37 ou 38 Hz. La vitesse en trs/min est donc :
N = 2220 Trs/min à 2280 Trs/min

La caractéristique reliant la tension de commande à la vitesse du ventilateur est une droite.

$$2220 < \frac{3200}{12}.x < 2280$$
$$8.32V < x < 8.55V$$

2. Evaluer la puissance moyenne contenu dans ce spectre sur l'horizon fréquentiel d'observation à l'oscilloscope.

En faisant abstraction du talon de bruit, il suffit de sommer les composantes élevées aux carrés, on obtient donc :

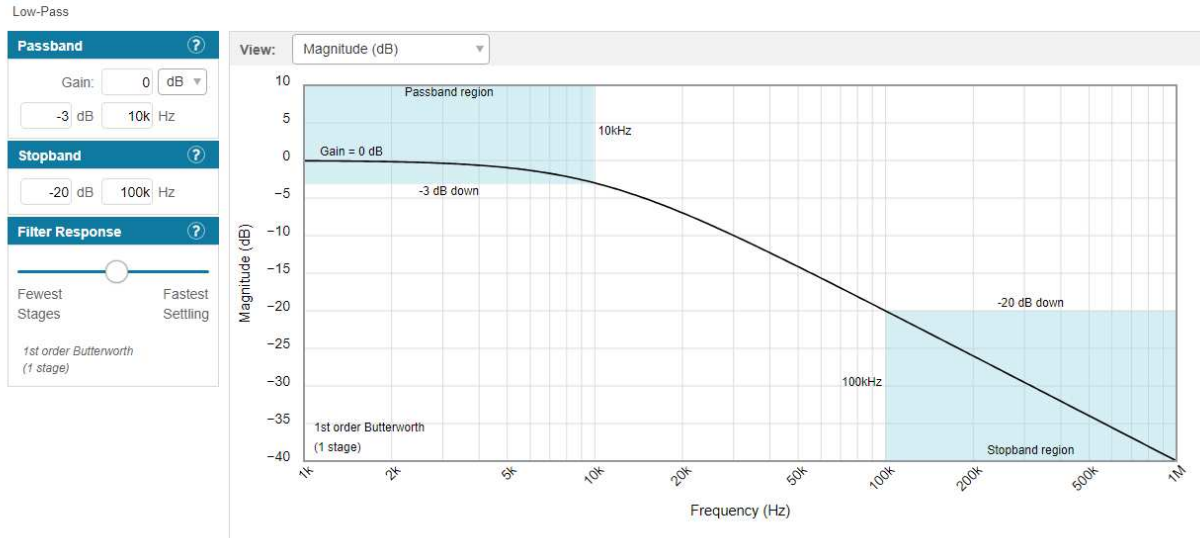
| fréquence | 11 | 14 | 26 | 28 | 32 | 34 | 37 | 43 | 46 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mV | 2,2 | 1,2 | 1 | 1,2 | 1,2 | 2 | 5,5 | 2 | 2 |
| $mV^2$ | 4,84 | 1,44 | 1 | 1,44 | 1,44 | 4 | 30,25 | 4 | 4 |

**W=52,41mV²/Hz**

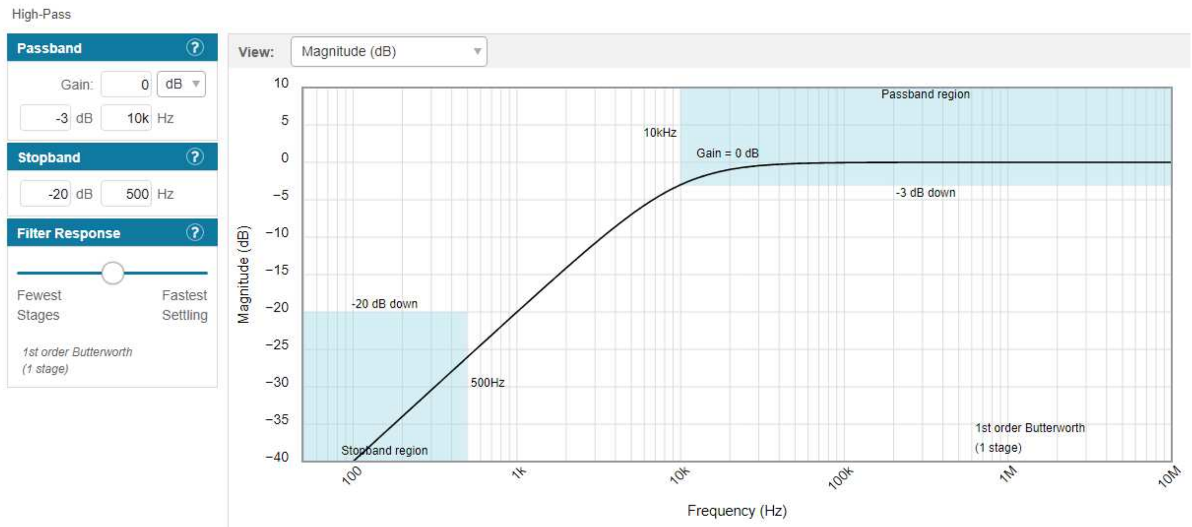
P moyen sur l'intervalle [0 ;50] : **P=2.62V²**

## ANNEXE

Exemple de filtre passe-bas




Exemple de filtre passe-haut




Remarque 1 : En plaçant deux filtres en cascade (bout à bout), on multiplie les fonctions de transfert.

Exemple :

$$\underbrace{\longrightarrow \boxed{H1(p) = \frac{A}{(1+\tau_1 p)}} \longrightarrow \boxed{H2(p) = \frac{B}{(1+\tau_2 p)}} \longrightarrow}$$

$$H(p) = \frac{A.B}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

## FORMULAIRE

| $x(t)$ | Transformée de Laplace | Transformée en Z |
|---|---|---|
| $\delta(t)$ | 1 | Non définie !… |
| $\begin{cases}1, t=0\\0, t\neq 0\end{cases}$ | 0 | $X_z(z)=1$ |
| $u(t)=\begin{cases}1, t>=0\\0, t<0\end{cases}$ | $u(p)=\frac{1}{p}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $t.u(t)$ | $\frac{1}{p^2}$ | $\frac{T_e.z}{[z-1]^2}$ |
| $\frac{t^2}{2}.u(t)$ | $\frac{1}{p^3}$ | $\frac{T_e^2.z.[z+1]}{2.[z-1]^3}$ |
| $e^{-a.t}.u(t)$ | $\frac{1}{p+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-a.T_e}}$ |
| $t.e^{-a.t}.u(t)$ | $\frac{1}{[p+a]^2}$ | $\frac{T_e.z.e^{-a.T_e}}{\left[z-e^{-a.T_e}\right]^2}$ |
| $\left[1-e^{-a.t}\right]u(t)$ | $\frac{a}{p.(p+a)}$ | $\frac{\left(1-e^{-a.T_e}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-a.T_e}\right)}$ |
| $\left[t-\frac{1-e^{-a.t}}{a}\right]u(t)$ | $\frac{a}{p^2.(p+a)}$ | $\frac{T_e.z}{(z-1)^2}-\frac{\left(1-e^{-a.T_e}\right)z}{a.(z-1)\left(z-e^{-a.T_e}\right)}$ |
| $\sin(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$ | $\frac{z.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2-2.z.\cos(\omega_0.T_e)+1}$ |
| $\cos(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$ | $\frac{z.[z-\cos(\omega_0.T_e)]}{z^2-2.z.\cos(\omega_0.T_e)+1}$ |
| $e^{-a.t}.\sin(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$ | $\frac{z.e^{-a.T_e}.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2-2.z.e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)+e^{-2.a.T_e}}$ |
| $e^{-a.t}.\cos(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$ | $\frac{z.\left[z-e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)\right]}{z^2-2.z.e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)+e^{-2.a.T_e}}$ |

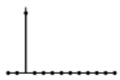
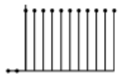
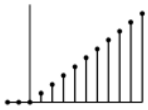
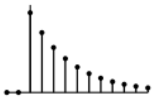
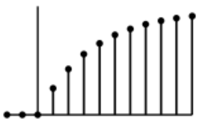
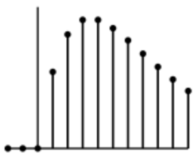
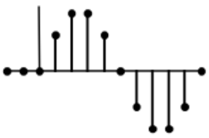
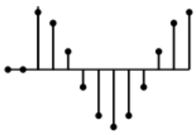
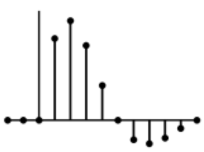
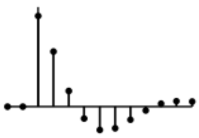
## Formes canoniques de filtres d'ordre 1 et 2

| Type de filtre | Forme canonique de l'équation différentielle | Forme canonique de la transmittance isochrone complexe |
|---|---|---|
| **Passe-bas** d'ordre 1 | $\frac{ds}{dt}+\frac{s}{\tau}=H_0\frac{e}{\tau}$ | $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_0}{\mathbf{1}+j\omega\tau}$ |
| | $\frac{ds}{dt}+\omega_C\times s=H_0\times\omega_C\times e$ | $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_0}{\mathbf{1}+j\frac{\omega}{\omega_C}}$ |

| Type de filtre | Forme canonique de l'équation différentielle | Forme canonique de la transmittance isochrone complexe |
|---|---|---|
| **Passe-haut** d'ordre 1 | $\frac{ds}{dt}+\frac{s}{\tau}=H_0\times\frac{de}{dt}$ | $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_0\boldsymbol{j\omega\tau}}{1+\boldsymbol{j\omega\tau}}$ |
| | $\frac{ds}{dt}+\omega_C\times s=H_0\times\frac{de}{dt}$ | $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_0\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_C}}}{1+\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_C}}}$ |

avec $\omega_C$: pulsation de coupure à $-3dB$ , dépendant des paramètres du système (en rad/s).
$\tau$ : constante de temps, dépendant des paramètres du système (en seconde).
$H_0$ : amplification pour les hautes fréquences (sans unité).

# TABLE DE TRANSFORMEES EN Z

| | **x(n)** | **X(z)** |
|---|---|---|
|  | Impulsion<br>$x(n)=\delta(n)$ | $1$ |
|  | Echelon unité<br>$x(n)=u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$ |
|  | Rampe<br>$x(n)=n.u(n)$ | $\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}=\frac{z}{\left(z-1\right)^2}$ |
|  | « Exponentielle »<br>$x(n)=a^n.u(n)$ | $\frac{1}{1-a.z^{-1}}=\frac{z}{z-a}$ |
|  | $\left(1-a^n\right).u(n)$ | $\frac{\left(1-a\right).z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right).\left(1-a.z^{-1}\right)}$<br>$=\frac{\left(1-a\right).z}{\left(z-1\right).\left(z-a\right)}$ |
|  | $n.a^n.u(n)$ | $\frac{a.z^{-1}}{\left(1-a.z^{-1}\right)^2}=\frac{a.z}{\left(z-a\right)^2}$ |
|  | Sinus<br>$\left[\sin\left(n.\omega_0.T_E\right)\right].u(n)$ | $\frac{\sin\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}}{1-2.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}+z^{-2}}$<br>$=\frac{\sin\left(\omega_0.T_E\right).z}{z^2-2.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z+1}$ |
|  | Cosinus<br>$\left[\cos\left(n.\omega_0.T_E\right)\right].u(n)$ | $\frac{1-\cos\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}}{1-2.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}+z^{-2}}$<br>$=\frac{z^2-\cos\left(\omega_0.T_E\right).z}{z^2-2.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z+1}$ |
|  | Oscillations amorties<br>$a^n.\left[\sin\left(n.\omega_0.T_E\right)\right].u(n)$ | $\frac{a.\sin\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}}{1-2.a.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}+a^2.z^{-2}}$<br>$=\frac{a.\sin\left(\omega_0.T_E\right).z}{z^2-2.a.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z+a^2}$ |
|  | $a^n.\left[\cos\left(n.\omega_0.T_E\right)\right].u(n)$ | $\frac{1-a.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}}{1-2.a.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z^{-1}+a^2.z^{-2}}$<br>$=\frac{z^2-a.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z}{z^2-2.a.\cos\left(\omega_0.T_E\right).z+a^2}$ |

**Développement en Séries de Fourier :**

*Première forme :*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k.\cos(2k\pi f t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.\sin(2k\pi f t)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t).\cos(2k\pi f t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t).\sin(2k\pi f t)\, dt$$

*Forme en cosinus*

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k.\cos(2k\pi f t + \alpha_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

*Forme complexe :*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(jk).e^{j2\pi k f t}$$

$$X(jk) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\mathrm{e}^{-j2\pi k f t} dt$$

**Formules d'Euler :**

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

**Densité d'énergie**

$d_E(t) = \frac{dW(t)}{dt} = |x(t)|^2$

**Energie**

$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ (Unité : si x est en volt **V**, alors l'énergie est en **$V^2$.s**)

**Densité Spectrale d'Energie DSE**

$\mathrm{DSE} = \mathrm{Sx(f)} = |\mathrm{X(f)}|^2$ (Unité : si x est en volt **V**, alors la DSE est en **$V^2/Hz^2$**)

**Energie**

$W = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$ (Unité : si x est en volt **V**, alors l'énergie est en **$V^2/Hz$** ou **$V^2$.s**)