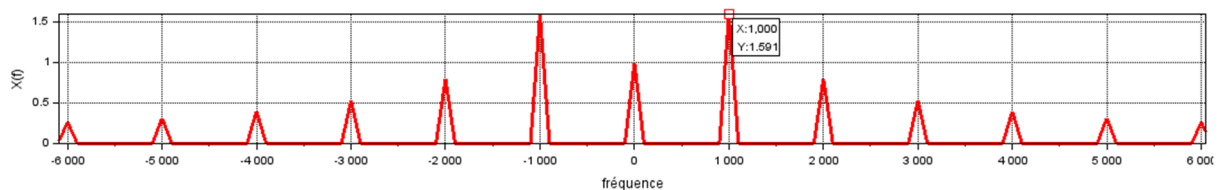
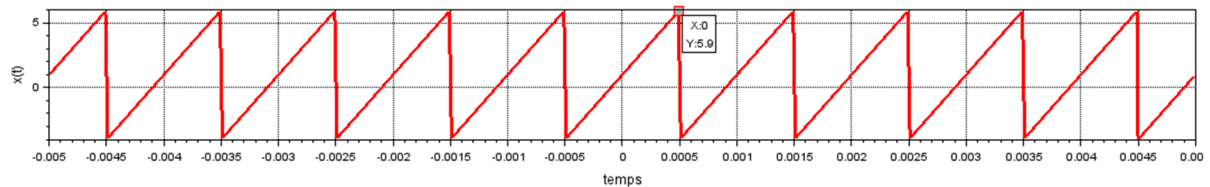


| | | |
|---|--|--------------------|
| NOM : | Examen Partiel 2 SY53 | Salle P305 |
| PRENOM : | | 19/06/2024 8h00 |
| Durée : 1H30 . Calculatrice autorisée. Aucun document (formulaire annexé). <i>(Durée 2h pour les personnes disposant d'un tiers temps supplémentaire)</i> | | |

Partie 1 : SLIT (filtrage analogique)

Exercice 1

Soit le signal en dents de scie associé à son spectre bilatéral en amplitude ci-dessous :



1. Le spectre $|X(f)|$ est un spectre de raies. Justifier cette affirmation.
2. On souhaite isoler uniquement le fondamental de ce spectre. Proposer alors un type de filtre analogique d'ordre 2 et donner ses principales caractéristiques (gain max., bande passante, ...).
3. Pour synthétiser une fonction de transfert de ce filtre d'ordre 2, on va associer deux filtres d'ordre 1. Caractériser totalement ce filtre (gain statique, fréquence particulière) en exprimant sa fonction de transfert.

Exercice 2

Un filtre analogique présente une fonction de transfert exprimée par :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2}$$

1. Calculer les pôles de ce filtre. Conclure sur la stabilité de ce filtre.
2. Exprimez le module de la réponse fréquentielle harmonique $|H(j\omega)|$ de ce filtre.
3. Calculez le gain $|G|$ en dB pour $\omega = 0, 0.5, 1, 2, 4$ rad/s et pour $\omega \rightarrow \infty$
4. Quelle est la nature de ce filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande) ?

Exercice 3

On souhaite émettre un signal BF $x(t)$ par voie Hertzienne dont on donne l'équation horaire : $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2 \sin(2\pi f_2 t)$, avec $f_1 = 100$ Hz et $f_2 = 200$ Hz

1. Donnez la décomposition en série de Fourier de $x(t)$ sous forme de cosinus.
2. Représentez le spectre unilatéral en amplitude de $x(t)$, noté $|X(f)|$

On module une porteuse $f_0 = 1000$ Hz en amplitude par $x(t)$. Pour cela, on effectue le produit de la porteuse par x . On note $y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ le signal modulé.

3. Que vaut $Y(f)$? Tracer le spectre $|Y(f)|$ de $y(t)$.

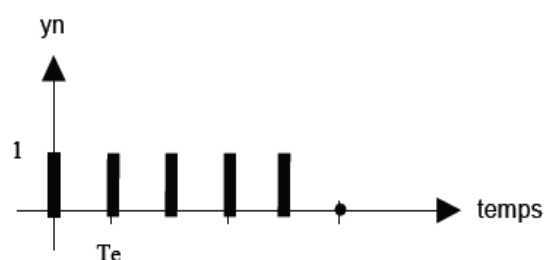
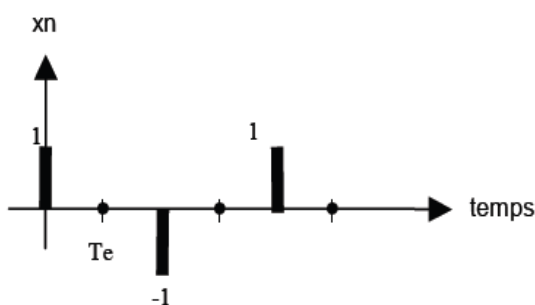
A la réception, du signal, on effectue une démodulation par détection synchrone qui consiste à multiplier $y(t)$ par la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ et en filtrant le signal résultant $z(t)$ par un filtre passe bas.

4. Tracez le spectre unilatéral $|Z(f)|$ du signal $z(t)$?
5. Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour récupérer le spectre du signal modulant $x(t)$?

Partie 2 : SLIT (filtrage numérique)

Exercice 4

1. Parmi les propositions suivantes, retrouvez la transformée en z des deux signaux échantillonnés suivants (cochez une des cases vrai ou faux) :



- | | Vrai | Faux |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) la transformée s'écrit : $X(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) la transformée s'écrit : $X(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) la transformée s'écrit : $Y(z) = 1 + 5z^{-1}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) la transformée s'écrit : $Y(z) = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-4}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

2. Un filtre numérique est caractérisé par la récurrence : $y_n = 0.8y_{n-1} + 0.2x_{n-1}$

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) sa transmittance s'écrit : $H(z) = 0.2z / (z-0.8)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) ce filtre est stable | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) sa transmittance en continu est égale à -1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) c'est un filtre RIF (non récursif) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 5

On effectue la synthèse d'un filtre passe-haut d'ordre 1 par la méthode de l'invariance fréquentielle (transformation bilinéaire ou méthode de Tustin).

On note T_e la période d'échantillonnage.

On rappelle également l'expression d'un filtre passe-haut analogique d'ordre 1 :

$$H(p) = \frac{Tp}{1+Tp} \quad \text{Avec } T : \text{ constante de temps (s)}$$

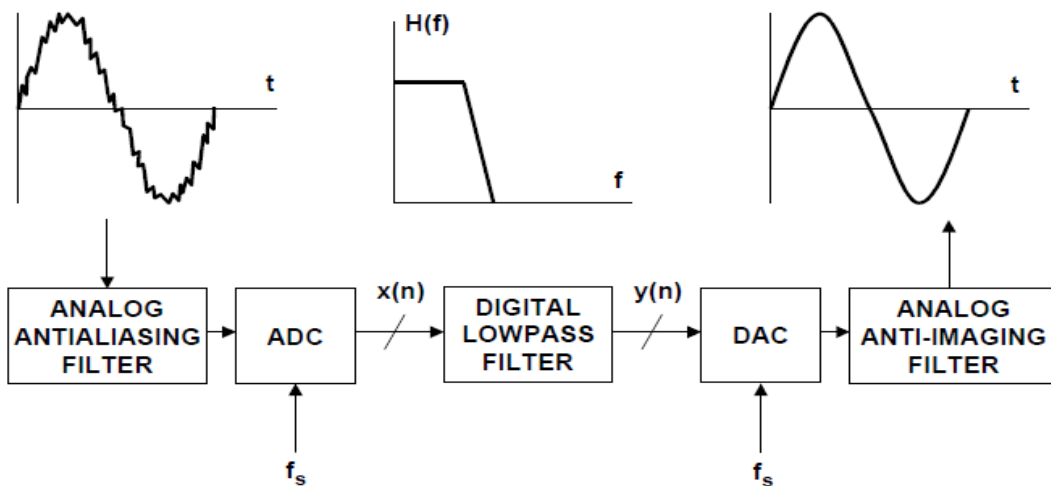
- Établir l'expression de la fonction de transfert de $H(z)$ en utilisant la transformation suivante.

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{On posera : } \alpha = 2T/T_e$$

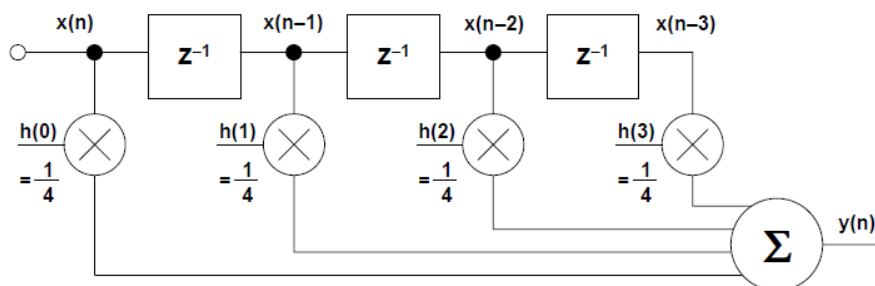
- Écrire la récurrence sous la forme : $y_n = a_0 y_{n-1} + b_0(x_n - x_{n-1})$ en explicitant les coefficients (a_0 et b_0) en fonction de α .

Exercice 6

- Sur la chaîne de traitement suivant, quel est le rôle du filtre analogique en entrée de traitement ? Développez



A partir du design du filtre suivant :



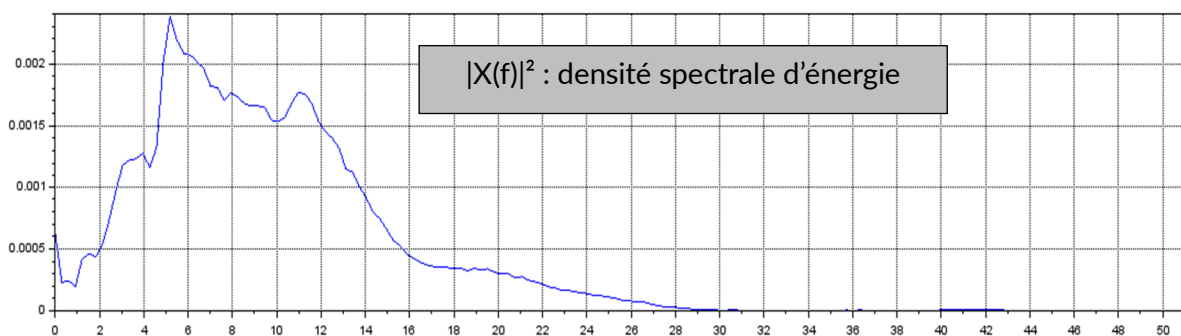
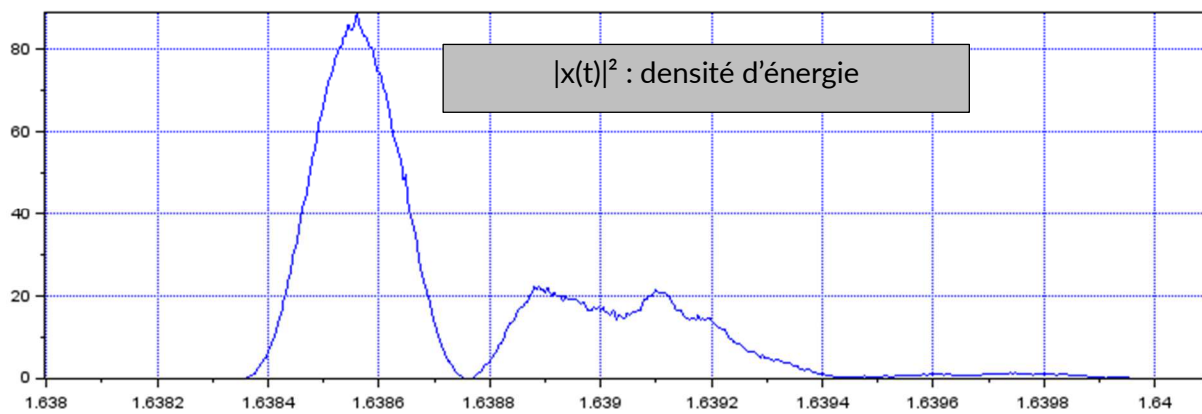
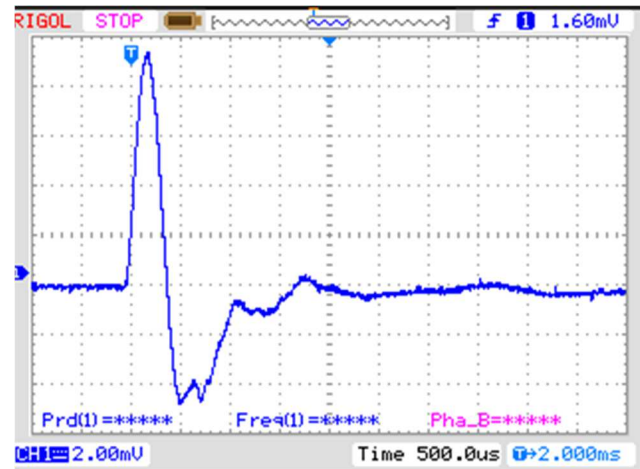
- Écrire la récurrence de ce filtre.
- Comment nomme-t-on un tel filtre ?

Partie 3 : Analyse de signaux

Exercice 7 :

On donne ci-dessous la réponse à un choc (choc sur une table en salle P307) mesuré à l'aide d'un accéléromètre de sensibilité 10mV/g.

On souhaite faire une analyse de traitement du signal. Pour cela, on trace sur Scilab $|x(t)|^2$ et $|X(f)|^2$



1. Evaluer l'énergie contenue dans ce choc
2. Est-ce que ce choc peut correspondre à un régime percutiel aux vues des représentations ci-dessus ?

Exercice 8 :

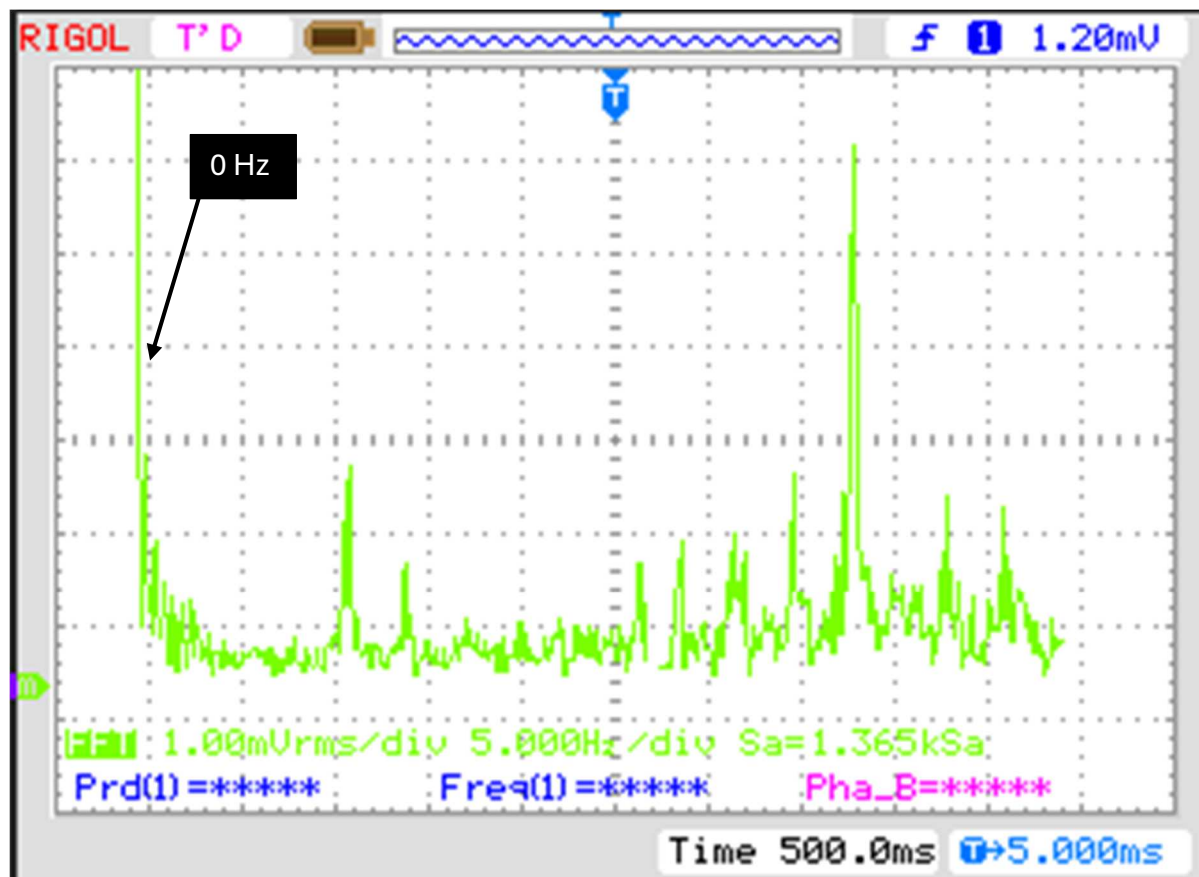
On se propose de réaliser une analyse vibratoire d'une petite « machine tournante » (ventilateur dont il manque deux pôles sur sept). Le ventilateur est instrumenté avec un accéléromètre de sensibilité 3.3mV/g.

Concernant le ventilateur :

- A tension nulle, le ventilateur ne tourne pas (évident).
- A tension nominale 12V, le ventilateur tourne à 3200 trs/min.

La caractéristique statique liant la vitesse à la tension d'alimentation est une droite.

Le spectre obtenu avec un oscilloscope (qui n'est pas un analyseur de spectre de grande précision) est le suivant.

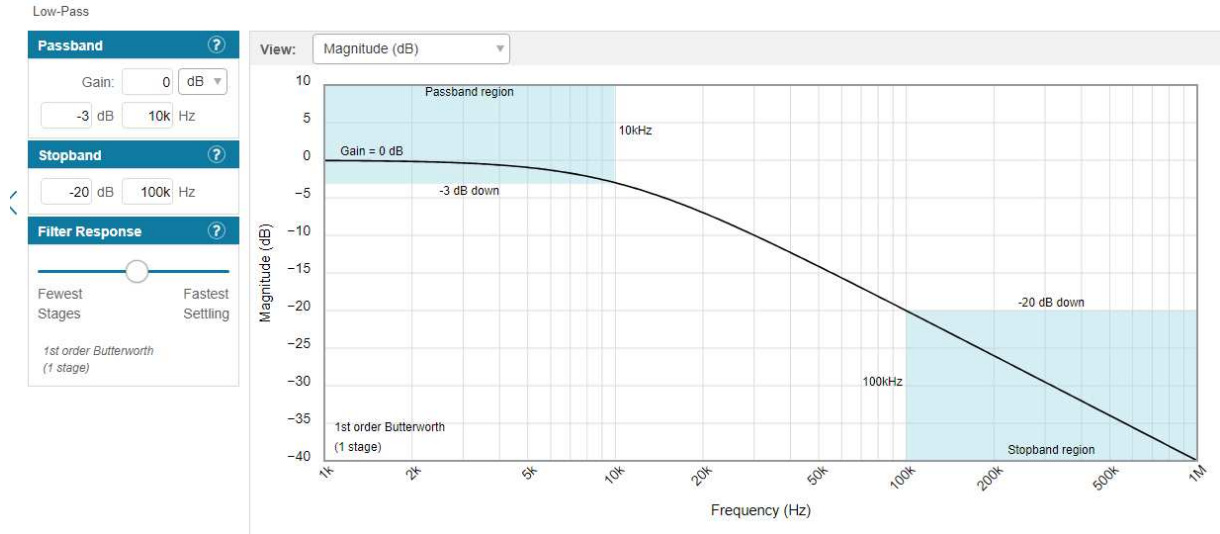


Il permet de repérer le balourd généré par l'absence de deux pôles. On rappelle également qu'un balourd radial sur une ligne d'arbre en rotation à f_0 fait apparaître des composantes spectrales à f_0 , $2f_0$, etc...

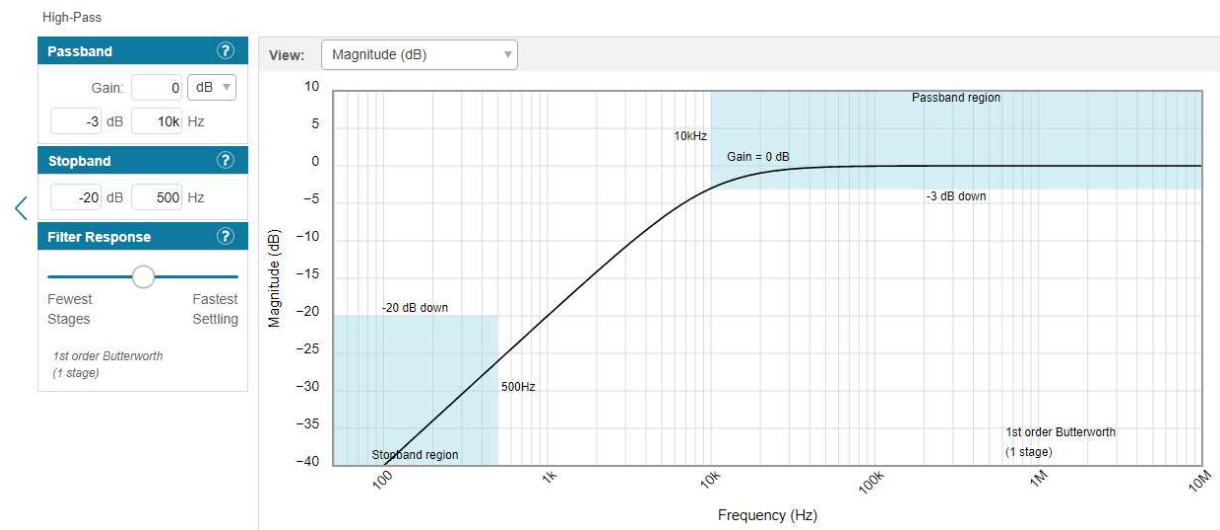
1. Retrouver la vitesse de rotation du ventilateur ainsi que la tension de commande de celui-ci.
2. Evaluer la puissance moyenne contenu dans ce spectre sur l'horizon fréquentiel d'observation à l'oscilloscope

ANNEXE

Exemple de filtre passe-bas

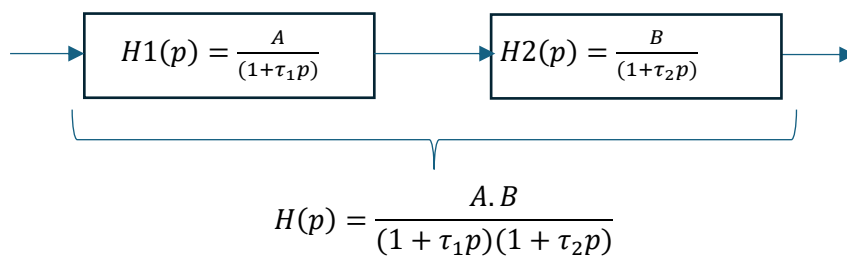


Exemple de filtre passe-haut



Remarque 1 : En plaçant deux filtres en cascade (bout à bout), on multiplie les fonctions de transfert.

Exemple :



FORMULAIRE

| $x(t)$ | Transformée de Laplace | Transformée en Z |
|--|---|--|
| $\delta(t)$ | 1 | Non définie !... |
| $\begin{cases} 1, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$ | 0 | $X_z(z) = 1$ |
| $u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ | $u(p) = \frac{1}{p}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $t.u(t)$ | $\frac{1}{p^2}$ | $\frac{T_e \cdot z}{[z-1]^2}$ |
| $\frac{t^2}{2}.u(t)$ | $\frac{1}{p^3}$ | $\frac{T_e^2 \cdot z \cdot [z+1]}{2 \cdot [z-1]^3}$ |
| $e^{-a.t}.u(t)$ | $\frac{1}{p+a}$ | $\frac{z}{z - e^{-a.T_e}}$ |
| $t.e^{-a.t}.u(t)$ | $\frac{1}{[p+a]^2}$ | $\frac{T_e \cdot z \cdot e^{-a.T_e}}{[z - e^{-a.T_e}]^2}$ |
| $[1 - e^{-a.t}]u(t)$ | $\frac{a}{p \cdot (p+a)}$ | $\frac{(1 - e^{-a.T_e})z}{(z-1)(z - e^{-a.T_e})}$ |
| $\left[t - \frac{1 - e^{-a.t}}{a} \right] u(t)$ | $\frac{a}{p^2 \cdot (p+a)}$ | $\frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-a.T_e})z}{a \cdot (z-1)(z - e^{-a.T_e})}$ |
| $\sin(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$ | $\frac{z \cdot \sin(\omega_0.T_e)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0.T_e) + 1}$ |
| $\cos(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$ | $\frac{z \cdot [z - \cos(\omega_0.T_e)]}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0.T_e) + 1}$ |
| $e^{-a.t} \cdot \sin(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$ | $\frac{z \cdot e^{-a.T_e} \cdot \sin(\omega_0.T_e)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot e^{-a.T_e} \cdot \cos(\omega_0.T_e) + e^{-2 \cdot a.T_e}}$ |
| $e^{-a.t} \cdot \cos(\omega_0.t)u(t)$ | $\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$ | $\frac{z \cdot [z - e^{-a.T_e} \cdot \cos(\omega_0.T_e)]}{z^2 - 2 \cdot z \cdot e^{-a.T_e} \cdot \cos(\omega_0.T_e) + e^{-2 \cdot a.T_e}}$ |

Formes canoniques de filtres d'ordre 1 et 2

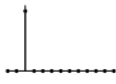
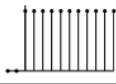
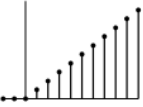
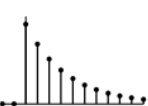
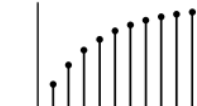
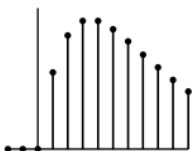

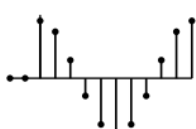
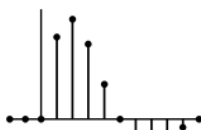
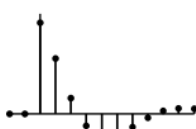
| Type de filtre | Forme canonique de l'équation différentielle | Forme canonique de la transmittance isochrone complexe |
|-----------------------------|--|--|
| Passe-bas d'ordre 1 | $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \frac{e}{\tau}$ | $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$ |
| | $\frac{ds}{dt} + \omega_c \times s = H_0 \times \omega_c \times e$ | $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ |
| Passe-haut d'ordre 1 | $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \times \frac{de}{dt}$ | $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$ |
| | $\frac{ds}{dt} + \omega_c \times s = H_0 \times \frac{de}{dt}$ | $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ |

avec ω_c : pulsation de coupure à $-3dB$, dépendant des paramètres du système (en rad/s).

τ : constante de temps, dépendant des paramètres du système (en seconde).

H_0 : amplification pour les hautes fréquences (sans unité).

TABLE DE TRANSFORMEES EN Z

| | x(n) | X(z) |
|---|--|---|
|  | Impulsion $x(n) = \delta(n)$ | 1 |
|  | Echelon unité $x(n) = u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ |
|  | Rampe $x(n) = n.u(n)$ | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$ |
|  | « Exponentielle » $x(n) = a^n.u(n)$ | $\frac{1}{1-a.z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$ |
|  | $(1-a^n).u(n)$ | $\frac{(1-a).z^{-1}}{(1-z^{-1}).(1-a.z^{-1})}$ $= \frac{(1-a).z}{(z-1).(z-a)}$ |
|  | $n.a^n.u(n)$ | $\frac{a.z^{-1}}{(1-a.z^{-1})^2} = \frac{a.z}{(z-a)^2}$ |
|  | Sinus $[\sin(n.\omega_0.T_E)].u(n)$ | $\frac{\sin(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+z^{-2}}$ $= \frac{\sin(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.\cos(\omega_0.T_E).z+1}$ |
|  | Cosinus $[\cos(n.\omega_0.T_E)].u(n)$ | $\frac{1-\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+z^{-2}}$ $= \frac{z^2-\cos(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.\cos(\omega_0.T_E).z+1}$ |
|  | Oscillations amorties $a^n.[\sin(n.\omega_0.T_E)].u(n)$ | $\frac{a.\sin(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+a^2.z^{-2}}$ $= \frac{a.\sin(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z+a^2}$ |
|  | $a^n.[\cos(n.\omega_0.T_E)].u(n)$ | $\frac{1-a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+a^2.z^{-2}}$ $= \frac{z^2-a.\cos(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z+a^2}$ |

Développement en Séries de Fourier :

Première forme :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2k\pi ft) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2k\pi ft)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \cdot \cos(2k\pi ft) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \cdot \sin(2k\pi ft) dt$$

Forme en cosinus

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2k\pi ft + \alpha_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

Forme complexe :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(jk) \cdot e^{j2\pi kft}$$

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi kft} dt$$

Formules d'Euler :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Densité d'énergie

$$d_E(t) = \frac{dW(t)}{dt} = |x(t)|^2$$

Energie

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{Unité : si } x \text{ est en volt } \mathbf{V}, \text{ alors l'énergie est en } \mathbf{V^2 \cdot s})$$

Densité Spectrale d'Energie DSE

$$\text{DSE} = S_x(f) = |X(f)|^2 \quad (\text{Unité : si } x \text{ est en volt } \mathbf{V}, \text{ alors la DSE est en } \mathbf{V^2/Hz^2})$$

Energie

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{Unité : si } x \text{ est en volt } \mathbf{V}, \text{ alors l'énergie est en } \mathbf{V^2/Hz} \text{ ou } \mathbf{V^2 \cdot s})$$