FINAL TE41

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé format A3

UTBM 24 Juin 2008

Exercice 1 : Question de cours - 3 points

1. Dans le cas général, un tenseur quelconque du quatrième ordre est représenté par :

   (a) 4 coefficients

   (b) 4^3 coefficients

   (c) 3^4 coefficients

   (d) 3 coefficients

   En thermoélasticité linéaire, on rappelle que $\rho_0\,\psi$ (où ψ est l'énergie libre) dépend quadratiquement du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ par l'intermédiaire du terme $\frac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}}$ où $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ est un tenseur d'ordre 4.

2. En thermoélasticité linéaire isotrope, le tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ ne comporte que :

   (a) 2 coefficients indépendants

   (b) 3 coefficients indépendants

   (c) 21 coefficients indépendants (à cause de la symétrie des coefficients A_{ijkl})

   (d) 4 coefficients indpendants : les 2 coefficients de Lamé, le module d'Young et le coefficient de Poisson.

3. On pose $A_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu\,(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk})$. Exprimer $A_{ijkl}\,e_{kl}$ en fonction de $Tr(\underline{\underline{e}})$ et de e_{ij}. En déduire que :

$$\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} = \lambda\,(Tr(\underline{\underline{e}}))^2 + 2\mu Tr(\underline{\underline{e}}^2)$$

Exercice 2 : Solide soumis à une flexion normale - 8 points

La pièce est un cylindre de longueur L , de génératrice suivant $\underline{e}_x$, de section quelconque notée S. On note S_0 la section en $x = 0$, S_L la section en $x = L$ et S_{lat} la surface latérale. On travaillera dans la base cartésienne $(\underline{e}_x\,,\,\underline{e}_y\,,\,\underline{e}_z\,)$. On applique sur les deux surfaces extrémité un moment de flexion.

Hypothèses :

- hypothèse des petites perturbations en isotherme.
- on suppose le matériau homogène élastique et isotrope.
- on néglige le poids propre de la structure.
- vecteur contrainte nul sur S_{lat}.
- sur S_0 on applique un moment de flexion : $-\,M_z\,\underline{e}_z$.
- sur S_L on applique un moment de flexion : $M_z\,\underline{e}_z$.

Questions :

1. Faire un schéma correspondant à cette sollicitation.
2. Ecrire l'équation d'équilibre de ce problème.

   On suppose que le tenseur des contraintes de Cauchy, noté $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \alpha\,y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante réelle}$$

3. Vérifier que ce tenseur des contraintes vérifie bien les équations d'équilibre.
4. A l'aide des conditions aux limites, donner l'expression de la constante α en fonction de M_z et du moment quadratique par rapport $\underline{e}_z$, noté I_z. On rappelle que :

$$\int\int_S yz\;ds = 0 \qquad \text{et} \qquad I_z = \int\int_S y^2 ds$$

5. Le matériau est homogène élastique et isotrope, on a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

   Calculer le tenseur des déformations de Green Lagrange $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

6. Calculer le champ de déplacements $\underline{\xi}$.

7. Tracer σ_{xx} dans le plan (x, y). En déduire comment travaillent les fibres de la poutre.

Exercice 3 : Torsion d'un cylindre à base circulaire - 9 points

Soit un cylindre de longueur L et de diamètre d, constitué d'un matériau dont on néglige le poids propre, homogène et isotrope. On suppose que l'on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations et dans le cas isotherme.

Les conditions aux limites sont :

- sur S_d la surface latérale, $r = \dfrac{d}{2}$, il n'y a pas de contrainte.
- sur S_L, extrémité $z = L$, on applique un couple de torsion égal à : $C\,\underline{e}_z$.
- sur S_0, extrémité $z = 0$, on applique un couple de torsion égal à : $-C\,\underline{e}_z$.

Pour des raisons de symétrie du problème on travaillera avec les coordonnées cylindriques :(r, θ, z) dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

1. On cherche un champ de déplacement $\underline{\xi}(r, z)$ de la forme :

   $$\underline{\xi}(r, z) \;=\; w(r, z)\,\underline{e}_\theta$$

   en utilisant les équations d'équilibre de Navier :

   $$(\lambda \,+\, \mu)\,\underline{grad}(\,div\,\underline{\xi}\,) \,+\, \mu\underline{\Delta\xi} \,+\, \rho\underline{F} \,-\, k\,\underline{grad}\,\tau \;=\; \underline{0}$$

   donner l'expression de l'équation différentielle que doit vérifier $w(r, z)$.

2. Montrer que :

   $$w(r, z) \;=\; (A\,z \,+\, D)\,r \,+\, (G\,z \,+\, H)\,\frac{1}{r}$$

   est solution de l'équation différentielle.

3. Donner l'expression du tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

4. On rappelle que :

   $$\underline{\underline{\sigma}} \;=\; \lambda\,Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}} \,+\, 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}$$

   Donner l'espression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

5. Utiliser les conditions aux limites pour trouver les différentes constantes.

6. La forme du tenseur des contraintes correspond-t-elle à l'expression de la contrainte tangentielle dans le cas d'une torsion (cf. formule de RDM)?

7. Que faudrait-il imposer pour déterminer complètement le déplacement ?
8. Tracer les cercles de Mohr pour un élément quelconque du cylindre.
9. Quel est, sur le cylindre, le lieu des contraintes maximales ?

Opérateurs en cylindrique :

$$div\,\underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\underline{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\Delta}\,\underline{v} = (\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2})\,\underline{e}_r + (\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2})\,\underline{e}_\theta + \Delta v_z\,\underline{e}_z$$

$$\Delta\,f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\underline{\underline{grad}}\,\underline{v}\,(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$