FINAL TE41

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé format A3

UTBM 25 Juin 2009

Exercice 1 : Question de cours - 1.5 points

Parmi les trois tenseurs de contraintes suivants :

1. premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff
2. second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff
3. tenseur des contraintes de Cauchy

   Lesquels interviennent dans :

   (a) Conservation de la quantité de mouvement en coordonnées lagrangiennes.
   (b) Conservation de la quantité de mouvement en coordonnées eulériennes.
   (c) Conservation de l'énergie en coordonnées lagrangiennes.
   (d) Conservation de l'énergie en coordonnées eulériennes.

Exercice 2 : Conservation de la masse - 5 points

La pièce est un cube de côté a. On note $\underline{X}$ les coordonnées lagrangiennes et $\underline{x}$ les coordonnées eulériennes du point M. On travaillera dans la base cartésienne $(\underline{e}_1\,,\,\underline{e}_2\,,\,\underline{e}_3\,)$. Soit la description lagrangienne suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 + \dfrac{V\,X_2\,t}{h} \\ x_2 & = & X_2 \\ x_3 & = & X_3 \end{array}\right. \qquad \text{où} \quad V, h \text{ sont des constantes réelles}$$

Questions :

1. Calculer $\underline{\underline{F}}$ et $det\underline{\underline{F}}$.
2. Calculer la vitesse eulérienne.
3. Soit ρ_0 la masse volumique à l'instant $t = 0$. A l'aide de l'équation de continuité en eulérienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.

4. A l'aide de l'équation de continuité en lagrangienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.

5. On suppose la répartition de masse homogène en espace. Calculer la masse du cube non déformé ($t = 0$). Calculer la masse dcube déformé ($t = T$). Conclure.

Exercice 3 : Etude d'un cylindre à base carrée - 6 points

Soit un cylindre de longueur L suivant l'axe $\underline{e}_y$ et dont la base est un carré de côté a dans le plan ($\underline{e}_x$, $\underline{e}_z$): $x \in [-a/2\,;\, a/2]$ et $z \in [-a/2\,;\, a/2]$. Il est constitué d'un matériau homogène et isotrope dont on néglige le poids propre.

On suppose que l'on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations et dans le cas isotherme. On travaillera dans la base cartésienne ($\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$).

On note S_0 la surface d'équation $y = 0$ et S_L la surface d'équation $y = L$.

On se donne le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\, x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta \;=\; \text{constante}$$

1. Les équations d'équilibre sont - elles vérifiées ?

2. Calculer la force relative à $\underline{\underline{\sigma}}$ sur la surface S_0.

3. Calculer la force relative à $\underline{\underline{\sigma}}$ sur la surface S_L.

4. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_0.

5. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_L.

6. A quel type de sollicitation correspond cette matrice des contraintes ?

Exercice 4 : Pression sur une plaque - 7,5 points

On considère une plaque rectangulaire, sans trou, d'épaisseur constante h, limitée par les plans d'équation $z = -h/2$ et $z = h/2$, $x = -a/2$ et $x = a/2$ et $y = -b/2$ et $y = b/2$. Les surfaces latérales, $x = a/2$ et $x = -a/2$, $y = -b/2$ et $y = b/2$, sont soumises à une pression uniforme d'intensité p (cf figure 1).

Hypothèses :

- hypothèse des petites perturbations en isotherme.
- on suppose le matériau homogène élastique et isotrope.
- on néglige le poids propre de la structure.
- sur $S_{a/2}$ le vecteur contrainte est égal à : $-p\,\underline{e}_x$.
- sur $S_{-a/2}$ le vecteur contrainte est égal à : $p\,\underline{e}_x$.
- sur $S_{b/2}$ le vecteur contrainte est égal à : $-p\,\underline{e}_y$.
- sur $S_{-b/2}$ le vecteur contrainte est égal à : $p\,\underline{e}_y$.
- sur $S_{-h/2}$ et $S_{h/2}$ le vecteur contrainte est nul.

Questions :

1. Ecrire l'équation d'équilibre de ce problème.
2. Expliquer pourquoi le tenseur des contraintes, noté $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Utiliser les équations d'équilibre et en déduire la forme de σ_{xx} et σ_{yy}.
4. A l'aide des conditions aux limites, donner l'expression des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$.
5. Le matériau étant homogène élastique et isotrope, on a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

   Calculer le tenseur des déformations linéarisées de Green Lagrange $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

6. Calculer le champ de déplacements $\underline{\xi}$.
7. Tracer les cercles de Mohr correspondants à cette sollicitation.

figure 1