FINAL TE41

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé

UTBM 25 Juin 2012

Exercice 1 : Question de cours - 1.5 points

Pour un matériau homogène, élastique et isotrope la relation entre $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ est donnée par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

Expliciter le calcul qui permet de trouver la relation reliant $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Exercice 2 : Conservation de la masse - 5 points

La pièce est un cube de côté a. On note $\underline{X}$ les coordonnées lagrangiennes et $\underline{x}$ les coordonnées eulériennes du point M. On travaillera dans la base cartésienne $(\underline{e}_1\,,\,\underline{e}_2\,,\,\underline{e}_3\,)$. Soit la description lagrangienne suivante :

$$\begin{cases} x_1 = (\,X_1 - X_2\,)\,e^{t} + X_2\,e^{-2t} \\ x_2 = X_2\,e^{-2t} \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Questions :

1. Calculer $\underline{\underline{F}}$ et $det\underline{\underline{F}}$.
2. Calculer la vitesse eulérienne.
3. Soit ρ_0 la masse volumique à l'instant $t = 0$. A l'aide de l'équation de continuité en eulérienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.
4. A l'aide de l'équation de continuité en lagrangienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.
5. On suppose la répartition de masse homogène en espace. Calculer la masse du cube non déformé ($t = 0$). Calculer la masse dcube déformé ($t = T$). Conclure.

Exercice 3 : Etude d'un cylindre à base circulaire - 6 points

Les axes O, x_1, x_2, x_3 sont orthonormés. On considère un barreau cylindrique de révolution autour de l'axe Ox_3 et dont les bases se trouvent dans les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = H > 0$. Ce barreau est en équilibre dans les conditions suivantes :

- matériau homogène et isotrope en isotherme,
- on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations,
- on néglige le poids propre,
- vecteur contrainte nul sur la surface latérale.
- on travaille dans la base cartésienne $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ avec le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Le tenseur des contraintes est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu\,\alpha\,x_2 \\ 0 & 0 & \mu\,\alpha\,x_1 \\ -\mu\,\alpha\,x_2 & \mu\,\alpha\,x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu \text{ et } \alpha = \text{ constantes}$$

1. Montrer que les équations d'équilibre sont vérifiées.
2. Montrer que le vecteur contrainte est nul sur la surface latérale. Indication : on travaille en coordonnes cartésiennes, bien que le solide soit un cylindre.
3. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_0 qui correspond au plan $x_3 = 0$.
4. Déterminer le champ des déplacements en supposant que le vecteur déplacement et le vecteur rotation sont nuls au point O.
5. A quel type de sollicitation correspond cette matrice des contraintes ?

Exercice 4 : Pression dans une sphère - 7.5 points

On consière une sphère creuse à paroi épaisse, de centre O dont la surface $\partial\Omega$ est constituée de S_a de rayon a et S_b de rayon b. Elle subit une pression normale uniforme égale à p_i sur sa paroi interne S_a et une pression normale uniforme sur sa paroi extérieure S_b, égale à p_e (cf figure 1). On choisit naturellement les coordonnées sphériques (r, θ, φ) centrées en O pour étudier ce problème.

Figure 1.

Hypothèses :

- hypothèses des petites perturbations.
- état isotherme.
- pas de forces volumiques.
- matériau homogène, élastique et isotrope.
- le vecteur contrainte sur S_a s'écrit : $p_i \, \underline{e}_r$
- le vecteur contrainte sur S_b s'écrit : $-\, p_e \, \underline{e}_r$

Questions :

1. Justifier pourquoi le vecteur déplacement $\underline{\xi}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\xi}\,(r, \theta, \varphi) \;=\; r\, f(r)\, \underline{e}_r$$

   où f est une fonction de r.

2. On rappelle que les équations de Navier (résolution par la méthode des déplacements)sont données par :

$$(\lambda \,+\, \mu)\, \underline{grad}(\, div\, \underline{\xi}\,) \,+\, \mu \underline{\Delta \xi} \,+\, \rho \underline{F} \,-\, k\, \underline{grad}\, \tau \;=\; \underline{0}$$

Montrer que les équations de Navier, en coordonnées sphériques, conduisent à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$4\,f'(r) \,+\, r\,f''(r) \,=\, 0$$

3. Intégrer cette équation.

   On pourra vérifier que la solution s'écrit sous la forme :

$$\underline{\xi}\,(r,\theta,\varphi) \,=\, \underline{\xi}\,(r) \,=\, (Ar \,+\, \frac{B}{r^2})\,\underline{e}_r \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes réelles}$$

4. Calculer le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

5. Calculer le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} \,=\, \lambda\,(tr\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}} \,+\, 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}$$

   où (λ, μ) représente les coefficients de Lamé.

6. Utiliser les conditions aux limites sur les contraintes.

7. Donner l'expression de $\underline{\xi}$.

Indications : Opérateurs en coordonnées sphériques

1. Un vecteur $\underline{v}$ au point M est décomposé dans la base locale orthonormée ($\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_\varphi$). Ses composantes sont v_r, v_θ, v_φ.

2. Divergence d'un vecteur :

$$div\,\underline{v} \;=\; \frac{\partial v_r}{\partial r} \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;+\; \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \;+\; cotg\theta\,\frac{v_\theta}{r} \;+\; 2\,\frac{v_r}{r}$$

3. Gradient d'une fonction scalaire $f(\underline{M}) \;=\; f(r,\theta,\varphi)$:

$$\underline{grad}\,f \;=\; \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta \;+\; \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

4. Laplacien d'un vecteur :

$$\begin{aligned}\Delta\,\underline{v} \;\; &= \left(\Delta v_r \;-\; \frac{2}{r^2}(v_r \;+\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\,\sin\theta)}{\partial\theta} \;+\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi})\right)\,\underline{e}_r \\ &+ \left(\Delta v_\theta \;+\; \frac{2}{r^2}(\frac{\partial v_r}{\partial\theta} \;-\; \frac{v_\theta}{2\sin^2\theta} \;-\; \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi})\right)\,\underline{e}_\theta \\ &+ \left(\Delta v_\varphi \;+\; \frac{2}{r^2\,\sin\theta}(\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} \;+\; cotg\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} \;-\; \frac{v_\varphi}{2\sin\theta})\right)\,\underline{e}_\varphi\end{aligned}$$

5. Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\Delta\,f \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \;+\; \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \;+\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \;+\; \frac{1}{r^2}\,cotg\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta} \;+\; \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

6. Gradient d'un vecteur :

$$\underline{\underline{grad}}\,\underline{v} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} \;-\; v_\theta) & \dfrac{1}{r}(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi} \;-\; v_\varphi) \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta} \;+\; v_r) & \dfrac{1}{r}(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} \;-\; cotg\theta\,v_\varphi) \\[2ex] \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} \;+\; cotg\theta\,v_\theta \;+\; v_r) \end{pmatrix}$$