5. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface OA.

6. Calculer le tenseur des déformations linéarisées de Green Lagrange $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

7. Caractériser en une phrase l'état de déformations sur le prisme.

8. Calculer le champ de déplacements $\underline{\xi}$.

Exercice 4 : Cercle de Mohr en contraintes planes - ~~5~~ 4 points

On considère un tenseur des contraintes plan, parallèlement à un plan perpendiculaire à $\underline{e}_3$. On désigne par σ_I et σ_{II} les contraintes principales en M et par $\underline{e}_I$ et $\underline{e}_{II}$ les directions principales associées. On suppose $\sigma_{II} \leq \sigma_I$. Soit $\underline{n}$ un vecteur unitaire du plan $(\underline{e}_I\,,\,\underline{e}_{II})$:

$$\underline{n} = \cos\alpha\,\underline{e}_I + \sin\alpha\,\underline{e}_{II}$$

et $\underline{t}$ le vecteur déduit de $\underline{n}$ par une rotation de $+\pi/2$ autour de $\underline{e}_3$. On décompose le vecteur contrainte suivant $\underline{n}$ et $\underline{t}$:

$$\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n} = F_n\,\underline{n} + F_t\,\underline{t}$$

On note :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1\,,\,\underline{e}_2)} \quad et \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_I\,,\,\underline{e}_{II})}$$

Questions :

1. Exprimer F_n et F_t en fonction de α , σ_I et σ_{II}.

2. Montrer que le point P de $\Re^2$, de coordonnées (F_n, F_t) décrit un cercle lorsque α varie. Préciser le centre et le rayon du cercle puis la position de P en fonction de α. Indication : $\cos(2\alpha) = \frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ et $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$.

3. Dessiner ce cercle appelé cercle de Mohr.

4. Pour $\underline{n} = \underline{e}_1$, calculer le vecteur contrainte associé et l'exprimer en fonction de $\underline{n}$ et $\underline{t}$. Placer le point P_1 sur le cercle de Mohr.

5. Pour $\underline{n} = \underline{e}_2$, calculer le vecteur contrainte associé et l'exprimer en fonction de $\underline{n}$ et $\underline{t}$. Placer le point P_2 sur le cercle de Mohr.

6. Comment sont situés ces deux points P_1 et P_2 sur le cercle ?

7. En déduire les valeurs de deux contraintes principales σ_I et σ_{II} en fonction des coefficients du tenseur des contraintes σ_{11} , σ_{12} et σ_{22}.

8. En déduire les directions principales c'est-à- dire $\tan(2\alpha)$.