FINAL TE41

Durée 2 heures - Formulaire de cours autorisé

UTBM 23 Juin 2014

Exercice 1 : Contrainte de Piola - Kirchoff - 10 points
En coordonnées lagrangiennes, on note $\underline{\underline{e}}$ le tenseur des déformations et $\underline{\underline{\dot{e}}}$ le tenseur des taux de déformations.

1. Montrer que :
$$\underline{\underline{\dot{e}}} = \frac{1}{2}\,\dot{\overbrace{{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}}} = \frac{1}{2}\,({}^t\underline{\underline{\dot{F}}}\,\underline{\underline{F}} + {}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{\dot{F}}})$$
2. Montrer que : $\underline{\underline{\dot{F}}} = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}$
3. Calculer : ${}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\,\underline{\underline{\dot{e}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}$
4. En déduire que $\underline{\underline{d}}$, le taux de déformation eulérien, est égal à :
$$\underline{\underline{d}} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\,\underline{\underline{\dot{e}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}$$
5. Soit $\underline{U}$ et $\underline{V}$ deux vecteurs en configuration non déformée. On définit $\underline{u} = \underline{\underline{F}}\,.\,\underline{U}$ et $\underline{v} = \underline{\underline{F}}\,.\,\underline{V}$. Montrer que :
$$\dot{\overbrace{\underline{u}\,.\,\underline{v}}} = 2\,\underline{\underline{\dot{e}}}\,\underline{U}\,.\,\underline{V} = 2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{u}\,.\,\underline{v}$$
6. On note $\mathcal{P}_i$ la puissance des efforts intérieurs :
$$\mathcal{P}_i = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}\; d\Omega_t$$
Montrer, en utilisant $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = tr(\underline{\underline{\sigma}}.\,\underline{\underline{d}})$, que cette puissance s'écrit en lagrangienne :
$$\mathcal{P}_i = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}}\; d\Omega_0$$
où on rappelle que l'expression de $\underline{\underline{\Pi}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ est :
$$\underline{\underline{\Pi}} = J\,\underline{\underline{F}}^{-1}\,\underline{\underline{\sigma}}\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}$$
Remarque : $\underline{\underline{\Pi}}$ est appelé le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff.

7. Vérifier que $\underline{\underline{\Pi}}$ est symétrique.

8. On rappelle que la normale extérieure déformée $\underline{n}$ s'exprime en fonction de la normale non déformée $\underline{N}$ par :

$$\underline{n}\, da \;=\; J\, {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, \underline{N}\, dA$$

Montrer que : $\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}\, da \;=\; \underline{\underline{\pi}}_1\, \underline{N}\, dA$ où on précisera l'expression de $\underline{\underline{\pi}}_1$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$.

9. On rappelle que $\underline{\underline{\pi}}_1$ est appelé le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. $\underline{\underline{\pi}}_1$ est -il symétrique ?

10. Calculer $\underline{\underline{\pi}}_1$ en fonction de $\underline{\underline{\pi}}$.

11. On rappelle que le bilan de la conservation de la quantité de mouvement en coordonnées eulériennes sur $\omega_t \;\in\; \Omega_t$ sécrit

$$\int_{\omega_t} (\, \rho\, \underline{\gamma} \;-\; \underline{f} \;-\; \underline{div}\, \underline{\underline{\sigma}}\,)\; d\omega_t \;=\; 0 \;\; \forall\, \omega_t \;\; \in\; \Omega_t$$

En se ramenant sur la configuration non déformée ω_0, écrire le bilan de la conservation de la quantité de mouvement en coordonnées lagrangiennes.

12. En admettant le résultat suivant :

$$\frac{\partial}{\partial\, X_l}\, (det\, \underline{\underline{F}}\, F_{lj}^{-1}) = 0 \quad \text{avec} \quad j = 1, 2, 3$$

Utiliser la question précédente et le lemme fondamental de la MMC pour montrer que :

$$\rho_0\, \underline{\gamma} \;=\; \underline{div}\, \underline{\underline{\pi}}_1 \;+\; \frac{\rho_0}{\rho}\, f \quad \text{dans} \quad \Omega_0$$

où $\underline{div}$ représente la divergence en coordonnées lagrangiennes.

13. Que peut-on dire de cette égalité pour les applications pratiques en calcul de structures (par la méthodes des éléments finis par exemple)?

14. Est-ce que cette égalité est utile dans le cadre des petits déplacements et des petites déformations ?

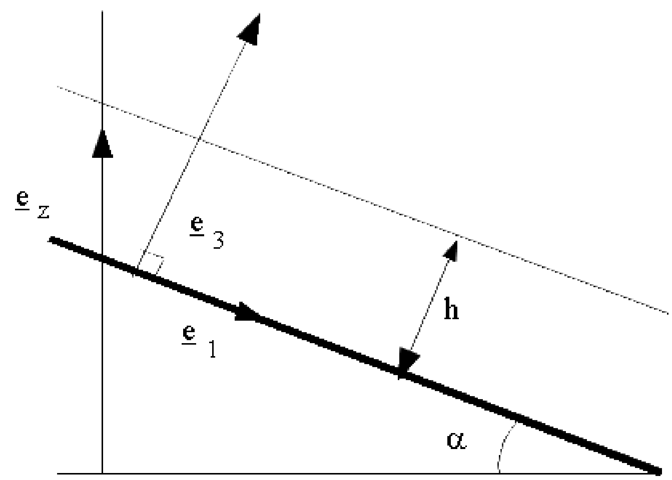
15. Pourriez-vous citer un exemple d'application en mécanique des solides où cette égalité est utile ?

Exercice 2 : Solide élastique sur un plan incliné - 10 points
On considère un milieu continu occupant le domaine Ω défini par :

$$\Omega = \{\underline{x} = x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 + x_3\,\underline{e}_3 \;\; \text{tel que} \;\; 0 \leq x_3 \leq h\}$$

qui définit une couche infinie d'épaisseur h constante. On suppose que l'axe Ox_1 fait un angle α avec l'horizontale et que la gravité s'exprime donc :

$$\underline{g} = -g\,\underline{e}_z \;\; \text{avec} \;\; \underline{e}_z = -\sin\alpha\,\underline{e}_1 + \cos\alpha\,\underline{e}_3$$



On suppose que le poids du milieu continu de masse volumique ρ induit une déformation infinitésimale et que le champ de déplacement a la forme suivante :

$$\underline{\xi} = a(x_3)\,\underline{e}_1 + b(x_3)\underline{e}_3$$

où $a(x_3)$ et $b(x_3)$ sont des fonctions que l'on cherche à déterminer.

On suppose qu'il n'y a pas de mouvement et que le milieu a un comportement élastique linéaire et isotrope. On note λ et μ ses coefficients de Lamé.
Le solide adhère à la paroi pour $x_3 = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déplacement. Il est en contact avec l'air sur la face $x_3 = h$ et l'on suppose que la pression atmosphérique p_a est constante.

1. Donner l'expression du tenseur des déformation linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x})$.
2. Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x})$.
3. Ecrire les équations d'équilibre. En déduire les deux équations différentielles à résoudre.
4. Ecrire les conditions limites en $x_3 = 0$ et $x_3 = h$.
5. En déduire l'expression des fonctions $a(x_3)$ et $b(x_3)$.
6. Calculer le vecteur contrainte exercé par le plan incliné sur le solide élastique.
7. Commenter ce résultat.