FINAL TE41 - P2015

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé

UTBM 23 Juin 2015

Exercice 1 : Equations de Beltrami - 15 points

On rappelle que :

a) La loi de comportement inverse en élasticité linéaire pour un matériau isotrope et homogène, sans couplage et sans déformation initiale, lie les déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ aux contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,(tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}} \tag{1}$$

où E et ν représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson et tr symbolise l'opérateur trace (somme des termes diagonaux d'une matrice).

b) La conservation de la quantité de mouvement en régime statique s'écrit :

$$\underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{F} = \underline{0} \tag{2}$$

où $\underline{div}$ représente la divergence vectorielle.

c) Les relations de compatibilité en fonction $\underline{\underline{\varepsilon}}$ s'écrivent :

$$\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,\underline{\underline{\varepsilon}}) + {}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,\underline{\underline{\varepsilon}}) - \underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{grad}}(\underline{grad}\,(tr(\underline{\underline{\varepsilon}}))) = \underline{\underline{0}} \tag{3}$$

où $\underline{grad}$ représente le gradient vectoriel et $\underline{\underline{grad}}$ le gradient matriciel et $\underline{\underline{\Delta}}$ le laplacien matriciel : $(\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{A}})_{ij} = \Delta A_{ij}$.

Questions :

1. En reportant l'équation (1) dans l'équation (3) montrer que :

$$
\begin{aligned}
&(1+\nu)\,\Big\{\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}}) \;+\; {}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}}) \;-\; \underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{\sigma}} \;-\; \underline{\underline{grad}}(\underline{grad}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})))\,\Big\} \\
&-\nu\,\Big\{\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}) \;+\; {}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}})) \\
&-\; \underline{\underline{\Delta}}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}) \;-\; \underline{\underline{grad}}(\underline{grad}\,(tr(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}})))\,\Big\} \;=\; \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2. On rappelle que $\underline{\underline{\Delta}}\,(\underline{\underline{A}}\,) \;=\; \Delta(A_{ij})\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \;=\; A_{ij,kk}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.
   Montrer que :
$$\underline{\underline{\Delta}}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}) \;=\; \Delta\,(tr(\underline{\underline{\sigma}}))\underline{\underline{1}} \tag{5}$$

3. Montrer que :
$$\underline{\underline{grad}}(\underline{grad}\,\Big(tr(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}))\Big) \;=\; 3\,\underline{\underline{grad}}\,\Big(\underline{grad}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}}))\Big) \tag{6}$$

4. Montrer que :
$$\underline{div}\,\Big((tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}\Big) \;=\; \underline{grad}\,(tr\,\underline{\underline{\sigma}}\,) \tag{7}$$

5. En se servant de l'équation (7), montrer que
$${}^t\underline{\underline{grad}}\Big(\,\underline{div}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}})\Big) \;=\; \underline{\underline{grad}}\Big(\underline{div}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}})\Big) \tag{8}$$

6. Déduire des équations (4), (5), (6), (7) et (8) que :
$$
\begin{aligned}
&(1+\nu)\,\Big\{\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}}) \;+\; {}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}}) \;-\; \underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{\sigma}}\Big\} \\
&+\nu\,\Delta\,(tr(\underline{\underline{\sigma}}))\underline{\underline{1}} \;-\; \underline{\underline{grad}}(\underline{grad}\,\Big(tr(\underline{\underline{\sigma}})\Big) \;=\; \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

7. En reportant (2) dans (9), montrer que :
$$
\begin{aligned}
&-\underline{\underline{grad}}\Big(\underline{grad}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\,)\Big) \;-\; \rho(1+\nu)\,\Big\{\underline{\underline{grad}}(\underline{F}) \;+\; {}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{F})\Big\} \\
&-(1+\nu)\,\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{\sigma}} \;+\; \nu\,\Delta\,(\,tr\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}} \;=\; \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

8. Montrer que :
   le coefficient ij de la matrice $\underline{\underline{grad}}\Big(\underline{grad}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\,)\Big)$ s'écrit : $tr(\underline{\underline{\sigma}})_{,ij}$

9. En déduire que :
$$tr\,\Big(\underline{\underline{grad}}\Big(\underline{grad}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\,)\Big)\,\Big) \;=\; \Delta\,\Big(tr(\underline{\underline{\sigma}})\,\Big) \tag{11}$$

10. Montrer que :

$$tr\left(\underline{\underline{grad}}\,(\underline{F})\right) \;=\; div(\underline{F}) \tag{12}$$

11. Montrer que :

$$tr\left(\underline{\underline{\Delta}}\,(\underline{\underline{\sigma}})\right) \;=\; \Delta(tr(\underline{\underline{\sigma}})) \tag{13}$$

12. Calculer la trace de (10) et utiliser (11), (12) et (13) pour montrer que :

$$\Delta(tr(\underline{\underline{\sigma}})) \;=\; \rho\,\frac{1+\nu}{\nu-1}\,div\,(\underline{F}) \tag{14}$$

13. En reportant (14) dans (10) montrer que :

$$\begin{aligned}
&(1+\nu)\,\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{\sigma}} \;+\; \underline{\underline{grad}}\left(\underline{grad}\,(tr(\underline{\underline{\sigma}})\,)\right) \;= \\
&-\rho\,(1+\nu)\,\left(\underline{\underline{grad}}(\underline{F}\,) \;+\; {}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{F}\,)\right) \;+\; \rho\,\nu\,\frac{1+\nu}{\nu-1}\,div\,(\underline{F})\,\underline{\underline{1}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Remarque : L'équation (15) est appelée équation de Milchell.

14. On suppose dans cette question que la force de gravitation $\underline{F}$ est uniforme en espace, c'est-à - dire que $\underline{F}$ est constant par rapport à $\underline{x}$.

    Que valent alors $\underline{\underline{grad}}(\underline{F})$, ${}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{F})$ et $div\,(\underline{F})$?

15. Simplifier l'équation (15) en conséquence. L'équation simplifiée obtenue s'appelle équation de Beltrami.

Remarque : L'équation de Beltrami est une équation en contrainte uniquement. Compte tenu des questions traitées précédemment, cette équation prend en compte la conservation de la quantité de mouvement, la loi de comportement et les relations de compatibilité.

Exercice 2 : Etude d'un cylindre à base circulaire - 8 points

Les axes O, x_1, x_2, x_3 sont orthonormés. On considère un barreau cylindrique de révolution autour de l'axe Ox_3, de longueur L et dont les bases circulaires de rayon R se trouvent dans les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = L > 0$. Ce barreau est en équilibre dans les conditions suivantes :

- matériau homogène et isotrope en isotherme,
- on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations,
- on néglige le poids propre,
- vecteur contrainte nul sur la surface latérale.
- on travaille dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) avec le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Le tenseur des contraintes est donné par dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu\,\alpha\,x_2 \\ 0 & 0 & \mu\,\alpha\,x_1 \\ -\mu\,\alpha\,x_2 & \mu\,\alpha\,x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu \text{ et } \alpha = \text{ constantes}$$

1. Montrer que les équations d'équilibre sont vérifiées.
2. Montrer que le vecteur contrainte est nul sur la surface latérale.

   Indication : on travaille en coordonnes cartésiennes, bien que le solide soit un cylindre.
3. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_0 qui correspond au plan $x_3 = 0$.
4. Déterminer le champ des déplacements en supposant que le vecteur déplacement et le vecteur rotation sont nuls au point O.
5. A quel type de sollicitation correspond cette matrice des contraintes ?