FINAL TE41 - P2016

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé

UTBM 24 Juin 2016

Exercice 1 : Loi de Hooke - 2 points

On rappelle que la loi de comportement inverse en élasticité linéaire pour un matériau isotrope et homogène, sans couplage et sans déformation initiale, lie les déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ aux contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

où E et ν représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson et tr symbolise l'opérateur trace (somme des termes diagonaux d'une matrice).

Question : En écrivant la loi de Hooke qui lie les contraintes aux déformations donner l'expression de λ et μ en fonction des coefficients de E et ν.

Exercice 2 : Conservation de la masse - 5 points

On suppose qu'un cylindre de base circulaire, de rayon R_0, et de longueur L_0 suivant e_3, est comprimé et se transforme en un cylindre de rayon r_1 et de même longueur L_0, pendant un laps de temps égal à T. On suppose également que chaque point du cylindre conserve le même angle polaire θ au cours de la déformation.On travaillera en coordonnées cylindriques avec la base (e_r, e_θ, e_3). Seul le rayon évolue selon la loi :

$$r(R,t) = (1 - \frac{t}{T})R + \frac{t}{T}\frac{r_1}{R_0}R$$

où R est le rayon dans la configuration non déformée ($0 \leq R \leq R_0$), r le rayon dans la configuration déformée ($0 \leq r \leq r_1$) et t le temps : $t \in [0, T]$.

1. Donner la description lagrangienne en coordonnées cartésiennes, dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. Calculer $\underline{\underline{F}}$, $det\underline{\underline{F}}$ et vérifier que $det\underline{\underline{F}}$ est bien positif.
3. Calculer la vitesse eulérienne.

4. Soit ρ_0 la masse volumique à l'instant $t = 0$. A l'aide de l'équation de continuité en eulérienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.
5. A l'aide de l'équation de continuité en lagrangienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.
6. On suppose la répartition de masse homogène en espace. Calculer la masse du cylindre non déformé ($t = 0$). Calculer la masse du cylindre déformé ($t = T$).

Exercice 3 : Etude d'un cylindre à base circulaire - 5 points

Les axes O, x_1, x_2, x_3 sont orthonormés. On considère un barreau cylindrique de révolution autour de l'axe Ox_1, de longueur L et dont les bases circulaires de rayon R se trouvent dans les plans $x_1 = 0$ et $x_1 = L > 0$. Ce barreau est en équilibre dans les conditions suivantes :

- matériau homogène et isotrope en isotherme,
- on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations,
- on néglige le poids propre,
- vecteur contrainte nul sur la surface latérale.
- on travaille dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) avec le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Le tenseur des contraintes est donné par dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu\,\alpha\,x_3 & \mu\,\alpha\,x_2 \\ -\mu\,\alpha\,x_3 & 0 & 0 \\ \mu\,\alpha\,x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu \text{ et } \alpha = \text{ constantes}$$

1. Montrer que les équations d'équilibre sont vérifiées.
2. Calculer le vecteur contrainte sur la surface latérale.

   Indication : on travaille en coordonnes cartésiennes, bien que le solide soit un cylindre.
3. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_0 qui correspond au plan $x_1 = 0$.
4. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_L qui correspond au plan $x_1 = L$.
5. A quel type de sollicitation correspond cette matrice des contraintes ?

Exercice 4 : Equilibre d'un barrage - 8 points

On considère un barrage en béton modélisé par un triangle rectangle isocèle et de dimension infinie dans la direction x_3. Le barrage est encastré sur sa base OB (déplacement nul) et soumis à une pression hydrostatique p répartie linéairement sur sa hauteur OA (cf.figure 1). Ses dimensions sont h suivant la direction $\underline{e}_1$ (soit $OB = h$) et h suivant la direction $\underline{e}_2$ (soit $OA = h$). La face AB est libre d'effort.

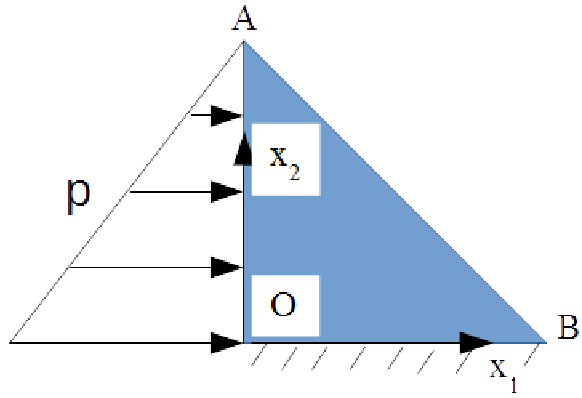

Figure 1: barrage soumis à une pression linéique p sur un côté

Hypothèses :

- hypothèses des petites perturbations.
- état isotherme.
- pas de forces volumiques.
- matériau homogène, élastique et isotrope.

Questions :

1. On cherche $\underline{\underline{\sigma}}$ sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(x_1\,,\,x_2\,)\;=\;\alpha\begin{pmatrix} x_2\,-\,h & x_1 & 0 \\ x_1 & h\,-\,(2x_1\,+\,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu x_1 \end{pmatrix}$$

   où α est une constante et ν le coefficient de Poisson.

   Vérifier que $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfait les équations d'équilibre du problème.

2. Donner l'expression de la pression $P(x_2)$ appliquée sur la face OA en fonction de p, x_2 et h (cf. figure 1).

3. Donner l'expression de α en fonction des données du problème en utilisant les conditions aux limites. Donner son unité dans le système international.

4. Calculer le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,(tr\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

   où E représente le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

5. Caractériser en une phrase l'état de déformations sur le barrage considéré.

6. Calculer le champ de déplacements ξ associé.

7. Ce déplacement est-il unique ?