FINAL TE41 - P2017

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé

UTBM 28 Juin 2017

Exercice 1 : Conservation de la masse - 3.5 points

On étudie un cube plein de côté c à l'instant $t = 0$. Dans la configuration initiale K_0, les coordonnées du point M sont données par $\underline{X}$. Dans la configuration K_t, les coordonnées du point M sont données par $\underline{x}$. On a :

$$\begin{cases} x_1 = & X_1\, e^{\alpha t} + X_2 \\ x_2 = & X_2\, e^{-\alpha t} \\ x_3 = & X_3 \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

1. Calculer $\underline{\underline{F}}$, $det\underline{\underline{F}}$.
2. Calculer la vitesse lagrangienne.
3. Calculer la vitesse eulérienne.
4. Soit ρ_0 la masse volumique à l'instant $t = 0$. A l'aide de l'équation de continuité en eulérienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.
5. A l'aide de l'équation de continuité en lagrangienne, calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0.
6. On suppose la répartition de masse homogène en espace. Calculer la masse du cube non déformé ($t = 0$). Calculer la masse du cube déformé ($t = T$).

Exercice 2 : Forces de volume - 2.5 points

A l'équilibre statique, un cube solide est soumis à un tenseur des contraintes de la forme dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & -4Kx_1^2 & 0 \\ -4Kx_1^2 & 8Kx_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3Kx_1x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{où } K \text{ est une constante}$$

- matériau homogène , élastique et isotrope en isotherme,
- on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations,
- on travaille dans la base cartésienne orthonormée (e_1, e_2, e_3) avec le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3).

1. Donner les dimensions de K.
2. Déterminer la densité de forces volumiques sachant que les équations déquilibre statique sont vérifiées.
3. Calculer le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Exercice 3 : Equation d'équilibre - 5 points

On considère un barreau de section carrée de côté a , de révolution autour de l'axe Oz, de longueur L : $x \in [-a/2; a/2]$ et $y \in [-a/2; a/2]$ et $z \in [0; L]$. Ce barreau est en équilibre dans les conditions suivantes :

- matériau homogène , élastique et isotrope en isotherme,
- on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations,
- on néglige le poids propre,
- on travaille dans la base cartésienne orthonormée (e_1, e_2, e_3) avec le système de coordonnées (x, y, z).

Le tenseur des contraintes est donné par dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{P}{L^3} \begin{pmatrix} \alpha\,(x^2y + xy^2) & -\alpha\,xy^2 + \beta y^3 & 0 \\ -\alpha\,xy^2 + \beta y^3 & y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec P , α et β constantes.

1. Donner l'unité de P puis de α et β.
2. Déterminer les valeurs de α et β pour que les équations d'équilibre sont vérifiées.
3. Calculer le vecteur contrainte sur la surface S_0 qui correspond à $z = 0$.
4. Calculer le vecteur contrainte sur la surface $S_{a/2}$ qui correspond à $x = a/2$.
5. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface $S_{a/2}$.

Exercice 4 : Cercle de Mohr en contraintes planes - 10 points

On considère un tenseur des contraintes plan, parallèlement à un plan perpendiculaire à $\underline{e}_3$. On désigne par σ_I et σ_{II} les contraintes principales en M et par $\underline{e}_I$ et $\underline{e}_{II}$ les directions principales associées. On suppose $\sigma_{II} \leq \sigma_I$. Soit $\underline{n}$ un vecteur unitaire du plan $(\underline{e}_I\,,\,\underline{e}_{II})$:

$$\underline{n} = \cos\alpha\,\underline{e}_I + \sin\alpha\,\underline{e}_{II}$$

et $\underline{t}$ le vecteur déduit de $\underline{n}$ par une rotation de $+\pi/2$ autour de $\underline{e}_3$. On décompose le vecteur contrainte suivant $\underline{n}$ et $\underline{t}$:

$$\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n} = F_n\,\underline{n} + F_t\,\underline{t}$$

On note :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1\,,\,\underline{e}_2)} \quad et \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_I\,,\,\underline{e}_{II})}$$

avec σ_I et σ_{II}, appelées contraintes principales et on suppose $\sigma_I > \sigma_{II}$.

Questions :

1. Calculer $\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n}$ dans la base $(\underline{e}_I\,,\,\underline{e}_{II})$, en fonction de σ_I, σ_{II} , $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
2. On rappelle que $F_n = \underline{F}.\underline{n}$, calculer F_n.
3. En utilisant $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$ et $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$, montrer que :
$$F_n = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\cos(2\alpha)$$
4. Exprimer $\underline{t}$ dans la base $(\underline{e}_I\,,\,\underline{e}_{II})$ en fonction de α.
5. On rappelle que $F_t = \underline{F}\,.\,\underline{t}$, calculer F_t.
6. En utilisant $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, montrer que :
$$F_t = -\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\sin(2\alpha)$$
7. Calculer $F_n - \dfrac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}$ et montrer que :
$$\left(F_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 + F_t^2 = R^2$$
8. Donner l'expression de R.
9. En déduire que le point P de $\Re^2$, de coordonnées (F_n, F_t) décrit un cercle lorsque α varie. Préciser le centre du cercle noté Ω et son rayon.

10. Compléter le cercle ci-joint : placer Ω et P.

11. Pour $\underline{n} = \underline{e}_1$, déterminer $\underline{t}$ et calculer le vecteur contrainte associé en fonction de σ_{11} et σ_{12}.

12. Compléter la figure en plaçant le point P_1 sur le cercle appelé cercle de Mohr.

13. Pour $\underline{n} = \underline{e}_2$, déterminer $\underline{t}$ et calculer le vecteur contrainte associé en fonction de σ_{22} et σ_{12}.

14. Placer le point P_2 sur le cercle de Mohr.

15. Comment sont situés ces deux points P_1 et P_2 sur le cercle ?

16. En déduire que le point Ω est le milieu de $[P_1 P_2]$.

17. Exprimer les coordonnées de Ω en fonction de σ_{11} et σ_{22}.

18. Exprimer le rayon R en fonction de σ_{11} , σ_{22} et σ_{12}.

19. On constate que la distance $O\sigma_I = O\Omega + R$ et la distance $O\sigma_{II} = O\Omega - R$, en déduire les valeurs de deux contraintes principales σ_I et σ_{II} en fonction des coefficients du tenseur des contraintes σ_{11} , σ_{12} et σ_{22}.

20. En déduire les directions principales c'est-à- dire $\tan(2\alpha)$.

NOM :

Prénom :

Cercle de Mohr - à compléter

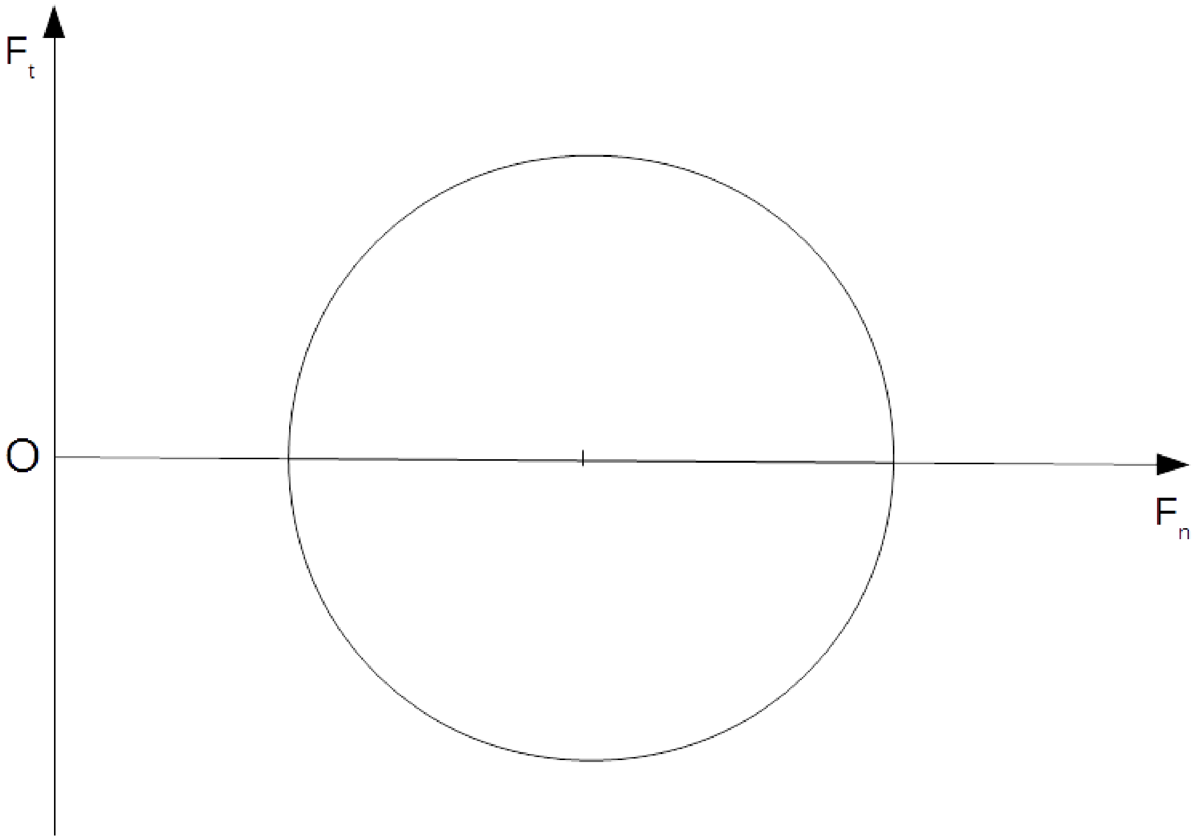

Figure 1: Cercle de Mohr - à compléter