FINAL TE41 - P2019

Durée 2 heures - Résumé de cours autorisé

UTBM 26 Juin 2019

Exercice 1 : Vecteur contrainte - 2 points

On considère en configuration actuelle rapportée à un repère cartésien $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, un bloc défini par :

$$\Omega_t = \{0 \leq x_1 \leq a \; ; 0 \leq x_2 \leq b \; ; 0 \leq x_3 \leq h\}$$

Le but de l'exercice est d'utiliser la notion de vecteur contrainte $\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}} \, . \, \underline{n}$ où $\underline{n}$ représente la normale extérieure. On suppose que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Indiquer la bonne réponse aux questions suivantes :

1. Le champ de contrainte est :

   (a) une traction uniforme (b) un cisaillement uniforme (c) une flexion (d) une rotation

2. le long de la direction :

   (a) $\underline{e}_1$ (b) $\underline{e}_2$ (c) $\underline{e}_3$

3. L'effort de contact ou efforts appliqués par l'extérieur sur le bord du bloc Ω_t est:

   (a) normal (b) tangentiel

4. à la direction :

   (a) $\underline{e}_1$ (b) $\underline{e}_2$ (c) $\underline{e}_3$

5. et s'exerce sur les faces de normale :

   (a) $+$ ou $-\,\underline{e}_1$ (b) $+$ ou $-\,\underline{e}_2$ (c) $+$ ou $-\,\underline{e}_3$

6. L'unité de σ dans le système international est :

   (a) MPa (b) N (c) Pa (d) N/mm^2

Exercice 2 : Conservation de la masse - 3 points

On étudie un cylindre plein de base circulaire de rayon R et de hauteur H à l'instant $t = 0$. Dans la configuration initiale K_0, les coordonnées du point M sont données par $\underline{X}$. Dans la configuration K_t, les coordonnées du point M sont données par $\underline{x}$. On connaît la vitesse eulériennne du mouvement :

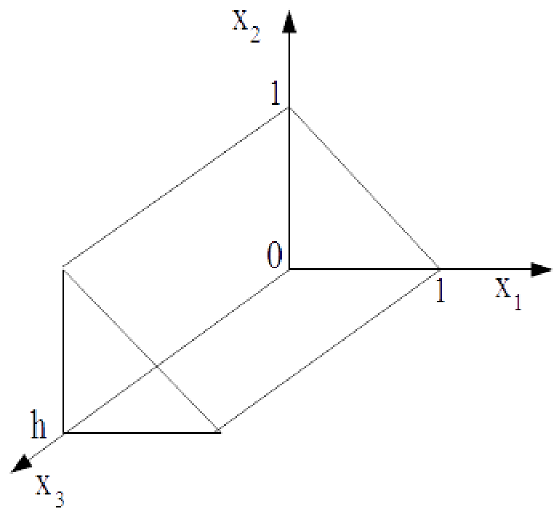
$$u_1 = -k\, x_2\, x_3 \quad ; \quad u_2 = k\, x_1\, x_3 \quad ; \quad u_3 = k\, c\, x_3$$

où $k = k(t) = k_0 \cos \omega t$ avec k_0 , ω et c constantes.

1. Soit ρ_0 la masse volumique à l'instant $t = 0$. Calculer la masse volumique ρ à l'instant t en fonction de ρ_0, k_0 , ω et c.
2. On suppose la répartition de masse homogène en espace. Calculer la masse du cylindre déformé ($t = T$).
3. Donner l'expression du déterminant de la transformation $det(\underline{\underline{F}})$.

Exercice 3 : Etude d'un prisme - 5 points

Les axes O, x_1, x_2, x_3 sont orthonormés. On considère un barreau de base triangulaire et d'axe Ox_3, de longueur h. Les bases sont deux triangles rectangles isocèles de côtés 1 et sont situées dans les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = h > 0$. Ce barreau est en équilibre statique.



On suppose le matériau homogène et isotrope en isotherme, on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations, dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) avec le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Le tenseur des contraintes est donné par dans la base cartésienne (e_1, e_2, e_3) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu\,\alpha\,x_2 \\ 0 & 0 & \mu\,\alpha\,x_1 \\ -\mu\,\alpha\,x_2 & \mu\,\alpha\,x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu \text{ et } \alpha = \text{ constantes}$$

1. En utilisant les équations d'équilibre statique, déterminer les forces volumiques.
2. Calculer la force relative sur la surface $x_3 = 0$.

   Remarque : La surface est un triangle rectangle isocèle de côté 1 donc les variables x_1 et x_2 ne sont pas indépendantes.
3. Calculer la force relative sur la surface $x_3 = h$.
4. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface qui correspond au plan $x_3 = 0$.

Exercice 4 : Cylindre à parois épaisses - 10 points

Soit un cylindre de longueur L à parois épaisses. La base du cylindre est une couronne circulaire de rayon intérieur a et de rayon extérieur b. Il est soumis à une pression radiale interne p_i sur la surface $S_a(r = a)$ et à une pression externe radiale p_e sur la surface $S_b(r = b)$.

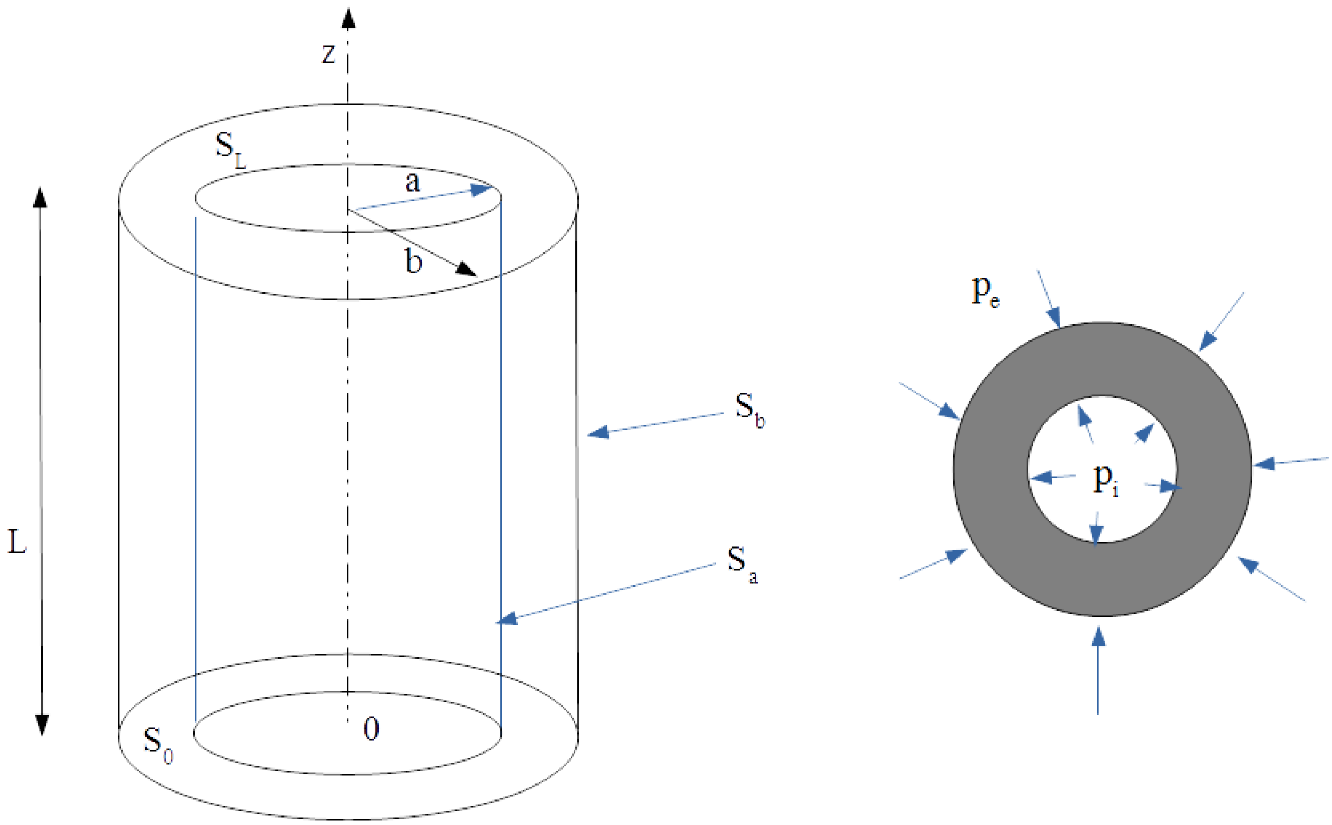


Figure 1: cylindre à parois épaisses

Hypothèses :

- Hypothèses des petites perturbations (HPP).
- matériau thermoélastique linéaire homogène isotrope.
- état isotherme.
- forces de masse négligées.

On note Ω_t le volume du cylindre et $\partial\Omega_t$ sa frontière : $\partial\Omega_t = S_a \cup S_b \cup S_0 \cup S_L$

Conditions limites :

$$\begin{cases} \text{sur } S_a : & \text{le vecteur contrainte} & = p_i\,\underline{e}_r & r = a\,,\ \forall\,(\theta\,,\,z)\,\in S_a \\ \text{sur } S_b : & \text{le vecteur contrainte} & = -p_e\,\underline{e}_r & r = b\,,\ \forall\,(\theta\,,\,z)\,\in S_b \\ \text{sur } S_0 : & \text{le vecteur contrainte} & = \underline{0} & z = 0\,,\ \forall\,(r\,,\,\theta)\,\in S_0 \\ \text{sur } S_L : & \text{le vecteur contrainte} & = \underline{0} & z = L\,,\forall\,(r\,,\,\theta)\,\in S_L \\ \text{sur } S_0 : & \underline{\xi}(r,\theta,0)\,.\,\underline{e}_z = 0 & & z = 0\,,\ \forall\,(r\,,\,\theta)\,\in S_0 \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de trouver le déplacement solution en utilisant la méthode des déplacements.

On cherche le vecteur déplacement $\underline{\xi}$ sous la forme :

$$\underline{\xi}\,(r,\theta,z) \;=\; u(r)\,\underline{e}_r \;+\; w(z)\,\underline{e}_z$$

Questions:

1. Justifier en une phrase pourquoi ce déplacement est admissible.
2. Ecrire les équations de Navier (loi de comportement), travailler en coordonnées cylindriques :
$$(\lambda\,+\,\mu)\,\underline{grad}(\,div\,\underline{\xi}\,)\,+\,\mu\underline{\Delta\xi}\,+\,\rho\underline{F}\,-\,k\,\underline{grad}\,\tau\;=\;\underline{0}$$
3. Montrer que le sytème différentiel à résoudre est :
$$\begin{cases} u''(r)\,+\,\dfrac{u'(r)}{r}\,-\,\dfrac{u(r)}{r^2}\,=0 \\ w''(z)\,=\,0 \end{cases}$$
4. Montrer que la solution de ce système différentiel est :
$$\begin{cases} u(r)\,=\,A\,r\,+\,\dfrac{B}{r} \\ w(z)\,=\,C\,z\,+\,D \end{cases}$$
avec A , B, C et D constantes réelles.
5. Utiliser les conditions limites sur $\underline{\xi}$, soit $\underline{\xi}(r,\theta,0)\,.\,\underline{e}_z\,=\,0$ pour déterminer D.
6. Montrer que le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ s'écrit :
$$\underline{\underline{\varepsilon}}\;=\;\begin{pmatrix} A\,-\,\dfrac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & A\,+\,\dfrac{B}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$
7. Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}\;=\;\lambda\,(tr\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}}\,+\,2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}$.
8. Utiliser les conditions limites sur les contraintes pour déterminer les autres constantes et écrire le système linéaire que doivent vérifier A, B et C.
9. Résoudre ce système et donner l'expression de $\underline{\xi}$.

Annexe : Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Un vecteur $\underline{v}$ au point M est décomposé dans la base locale orthonormée $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_z$. Ses composantes sont v_r, v_θ, v_z :

$$\underline{v}(\underline{M}) \;=\; v_r(r,\theta,z)\,\underline{e}_r \;+\; v_\theta(r,\theta,z)\,\underline{e}_\theta \;+\; v_z(r,\theta,z)\,\underline{e}_z$$

On a dans cette base :

$$div\,\underline{v} \;=\; \frac{\partial v_r}{\partial r} \;+\; \frac{v_r}{r} \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;+\; \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\underline{grad}\,f \;=\; \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta \;+\; \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\Delta}\,\underline{v} \;=\; (\Delta v_r \;-\; \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;-\; \frac{v_r}{r^2})\,\underline{e}_r \;+\; (\Delta v_\theta \;+\; \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \;-\; \frac{v_\theta}{r^2})\,\underline{e}_\theta \;+\; \Delta v_z\,\underline{e}_z$$

$$\Delta\, f \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \;+\; \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\underline{\underline{grad}}\,\underline{v}\,(\underline{x}) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} \;-\; v_\theta) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;+\; v_r) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$