TE41 - FINAL P2021 - MERCREDI 22 JUIN 2022
calculatrice interdite - Formulaire TE41 autorisé

Exercice 1 : Conservation de l'énergie en lagrangien - 7 points

L'objectif est de trouver l'équation de la conservation de l'énergie en coordonnées lagrangiennes en partant de l'équation de conservation de l'énergie en coordonnées eulériennes et en restant en équation locale.

L'équation locale en coordonnées eulériennes, s'écrit :

$$\rho\,\dot{e} = r - div\underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \tag{1}$$

1. Multiplier l'équation (1) par J et montrer que : 0.5 point

$$\rho_0\,\dot{e} = J\,r - J\,div\underline{q} + J\,\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \tag{2}$$

2. Le tenseur des déformations de Green Lagrange s'écrit : $\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}({}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})$
   Montrer que : 0.5 point

$$\dot{\widehat{\underline{\underline{e}}}} = \frac{1}{2}({}^t\dot{\widehat{\underline{\underline{F}}}}.\underline{\underline{F}} + {}^t\underline{\underline{F}}.\dot{\widehat{\underline{\underline{F}}}})$$

3. Montrer que : 1 point

$${}^t\underline{\underline{F}}^{-1}.\dot{\widehat{\underline{\underline{e}}}}.\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{1}{2}({}^t\underline{\underline{F}}^{-1}.{}^t\dot{\widehat{\underline{\underline{F}}}} + \dot{\widehat{\underline{\underline{F}}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}) \tag{3}$$

4. On rappelle que : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\phi}$ où $\underline{\underline{\nabla}}$ représente le gradient lagrangien.
   Montrer que : 0.75 point

$$\dot{\widehat{\underline{\underline{F}}}}.\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{grad}}\,\underline{u} \qquad \text{avec } \underline{\underline{grad}} \quad \text{gradient eulérien} \tag{4}$$

5. Montrer que : 0.25 point

$${}^t\underline{\underline{grad}}\,\underline{u} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}.{}^t\dot{\widehat{\underline{\underline{F}}}} \tag{5}$$

 Nadia Labed - François Peyraut

6. On sait que $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}({}^t\underline{\underline{grad}}\,\underline{u} + \underline{\underline{grad}}\,\underline{u})$ où $\underline{\underline{grad}}$, en utilisant (3), (4) et (5), en déduire que : 0.25 point

$$ {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} . \dot{\widehat{\underline{\underline{e}}}} . \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{d}} \tag{6} $$

7. On rappelle que : $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = tr(\underline{\underline{\sigma}} . \underline{\underline{d}})$. En utilisant que $tr(AB) = tr(BA)$, montrer que : 0.5 point

$$ tr(\underline{\underline{\sigma}} . \underline{\underline{d}}) = tr(\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\sigma}} . {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} . \dot{\widehat{\underline{\underline{e}}}}) $$

8. En déduire que : 0.5 point

$$ J\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\widehat{\underline{\underline{e}}}} \tag{7} $$

avec : $\underline{\underline{\Pi}}$ second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff $= J\,\underline{\underline{F}}^{-1}\,\underline{\underline{\sigma}}\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}$.

9. En utilisant l'équation(7), montrer que l'équation(2) s'écrit en posant $r_0 = Jr$: 0.25 point

$$ \rho_0\,\dot{e} = r_0 - J\,div\,\underline{q} + \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\widehat{\underline{\underline{e}}}} \tag{8} $$

10. Or la divergence de $\underline{q}$ est en eulérien. On pose : $\underline{q}_0 = J\,\underline{\underline{F}}^{-1}\,\underline{q}$, montrer que : 2.25 points

$$ J\,div\,\underline{q} = \nabla \underline{q}_0 \tag{9} $$

Indications : Utiliser la dérivation en chaîne et admettre le résultat suivant :

$$ \frac{\partial}{\partial X_l}\left(det\underline{\underline{F}}\,F^{-1}_{lj}\right) = 0 \qquad j = 1, 2, 3 $$

11. En reportant le résultat précédant dans l'expression (8), déduire l'équation de conservation de l'énergie en coordonnées lagrangienne : 0.25 point

$$ \rho_0\,\dot{e} = r_0 - \nabla\,\underline{q}_0 + \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\widehat{\underline{\underline{e}}}} \qquad \text{dans } \Omega_0 $$

Exercice 2 : Mouvement irrotationnel - 6 points

On considère un mouvement défini par la vitesse eulérienne :

$$\underline{u}^E = \psi_1(x_2, t)\,\underline{e}_1 + \psi_2(x_1, t)\,\underline{e}_2 \tag{10}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont de classe C^1.

1. On rappelle que :
$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{grad}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{grad}}\,\underline{u}\right)$$
Calculer le tenseur taux de déformation, noté $\underline{\underline{d}}$, matrice $(3,3)$. 0.5 point

2. Si on pose $\alpha = \frac{\psi_{1,2} + \psi_{2,1}}{2}$, déterminer les valeurs principales et les directions principales de $\underline{\underline{d}}$. Discuter suivant les valeurs de α. 1.5 points

3. On rappelle que :
$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{grad}}\,\underline{u} - {}^t\underline{\underline{grad}}\,\underline{u}\right) \quad \text{et} \quad \underline{\Omega} = \frac{1}{2}\,\underline{rot}\;\underline{u}$$
Déterminer le tenseur taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ et le vecteur tourbillon $\underline{\Omega}$.1 point

4. A quelle condition le mouvement est irrotationnel (c'est-à-dire $\underline{\Omega} = \underline{0}$) ? Vous devez trouver une équation différentielle. 0.5 point

5. Montrer que :
$$\begin{cases} \psi_1(x_2, t) = \dfrac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2}(t)\,x_2 + f_1(t) \\[2ex] \psi_2(x_1, t) = \dfrac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2}(t)\,x_1 + f_2(t) \end{cases} \tag{11}$$
où f_1 et f_2 fonctions quelconques, satisfont l'équation différentielle de la question précédente. 1 point

6. On rappelle que le taux de dilatation volumique s'écrit :
$$\frac{\dot{\widehat{\Omega_t}}}{\Omega_t} = div\,\underline{u} \tag{12}$$
Calculer le taux de dilatation volumique. 0.5 point

7. Soit $\rho_0(\underline{X}) = \rho(\underline{X}, 0)$ la masse volumique initiale. Calculer $\rho(\underline{x}, t)$ la masse volumique dans la configuration déformée en fonction de ρ_0. 0.75 point

8. Calculer $det\,\underline{\underline{F}}$. 0.25 point

Exercice 3 : Contraintes dans un domaine - 7 points

Dans le repère orthonormé cartésien $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, on considère un milieu défini par :

$$0 \leq x \leq L \qquad \frac{-h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \qquad \frac{-e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2} \tag{13}$$

La section définie par $x = L$ est encastrée. On suppose que les forces de volume sont négligeables et l'état des contraintes en tout point $M(x, y, z)$ est défini dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{P}{eh} - \dfrac{12\,F\,xy}{eh^3} \\ \sigma_{12} = -\dfrac{3\,F}{2eh}\left(1 - \dfrac{4y^2}{h^2}\right) \end{cases}$$

Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope (E, ν). On se place dans l'hypothèse des petites perturbations.

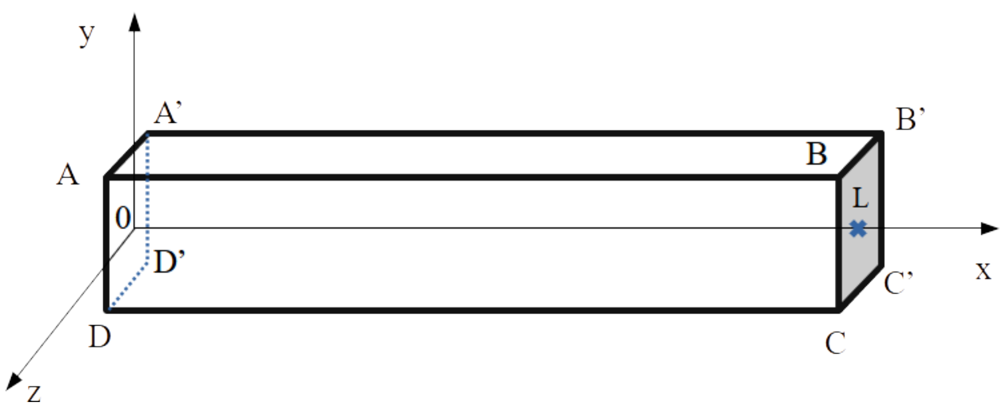

FIGURE 1 – $0 \leq x \leq L$, $\dfrac{-h}{2} \leq y \leq \dfrac{h}{2}$ et $\dfrac{-e}{2} \leq z \leq \dfrac{e}{2}$

1. Les équation d'équilibre statiques sont-elles vérifiées ? 1 point
2. Calculer le vecteur contrainte sur la face $ABB'A'$ qui correspond au plan d'équation $y = \frac{h}{2}$. 1 point
3. Calculer le vecteur contrainte sur la face $CDD'C'$ qui correspond à $y = \frac{-h}{2}$. 0.5 point
4. Calculer le vecteur contrainte sur la face $ADD'A'$ qui correspond à $x = 0$. 1 point
5. Puis calculer la résultante ou la force sur cette face et le moment résultant par rapport au point O. 2 points
6. Quelle sollicitation subit ce milieu ? Justifier votre réponse. 1 point
7. Donner l'expression du tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé en utilisant la loi de Hooke. 0.5 point