TE41 - FINAL P202 - MARDI 20 JUIN 2023

calculatrice interdite - Formulaire TE41 autorisé

Exercice 1 : Contrainte équivalente de Von Mises - 4 points

Le but de cet exercice est de calculer une contrainte équivalente. En effet la matrice des contraintes est une matrice réelle et symétrique donc à partir de ses 6 coefficients, on va déterminer une contrainte équivalente qui sera une combinaison de ses coefficients. Cette contrainte équivalente est indispensable pour définir les critères de plasticité car la contrainte équivalente doit être inférieure à la limite élastique du matériau.

La contrainte équivalente de Von Mises est définie par :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2} \tag{1}$$

où σ_I, σ_{II} et σ_{III} représentent les contraintes principales ou valeurs propres de $\underline{\underline{\sigma}}$.

On reste dans le domaine élastique si : $\sigma_{eq}^{VM} \leq \sigma_e$

Dans cet exercice, on travaille en contraintes planes. La matrice des contraintes est donnée par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappel : Les contraintes principales sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_I = \dfrac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \\ \sigma_{II} = \dfrac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \\ \sigma_{III} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

On souhaite montrer que en contraintes planes, la contrainte équivalente de Von Mises peut aussi s'écrire :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}$$

1. Donner l'expression de la contrainte de Von Mises (1) dans le cas des contraintes planes, $\sigma_{III} = 0$.
2. On pourrait remplacer les expressions analytiques des contraintes principales données par (2). On constate que le calcul est fastidieux. Donc nous allons travailler avec les invariants de $\underline{\underline{\sigma}}$.

   Exprimer la trace et le déterminant de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base principale.

3. Montrer alors que (1) peut aussi s'écrire :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(tr(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - 3\,det\underline{\underline{\sigma}}} \tag{3}$$

4. En déduire que :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}$$

Exercice 2 : Conservation de la masse - 4 points

Soit dans la configuration initiale un cube de côté a. On note X_i $(i = 1, 2, 3)$, les coordonnées d'un point à l'instant $t = 0$ dans la configuration non déformée et x_i ses coordonnées dans la configuration déformée. Soit la description lagrangienne suivante :

$$\begin{cases} x_1 &= X_1\, e^{\alpha\, t} \\ x_2 &= X_2\, e^{\alpha\, t} \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 &= X_3 \end{cases}$$

1. Calculer sa vitesse eulérienne .
2. On suppose que la masse volumique à l'instant $t = 0$ est ρ_0. Donner l'expression de sa masse volumique ρ à l'instant t. On utilisera l'équation de continuité en eulérienne.
3. Donner l'expression de la matrice des transformations $\underline{\underline{F}}$.
4. Donner l'expression de la masse volumique $\rho(t)$ en utilisant l'équation de continuité en lagrangienne.
5. Calculer la masse du cube non déformé.
6. Calculer la masse du cube déformé à l'instant t. On rappelle que :

$$m = \iiint_V \rho dv$$

Exercice 3 : Contraintes dans une poutre - 12 points

On considère un parallélépipède de longueur totale $2L$ suivant l'axe $\underline{e}_1$, de hauteur $2h$ suivant l'axe $\underline{e}_2$ et d'épaisseur e suivant $\underline{e}_3$. Le barreau est en appui simple sur la face $x_1 = -L$ et $x_1 = L$.

Sur la face $x_2 = h$, on applique une pression uniforme d'intensité p.

On suppose que le barreau est à l'équilibre et on néglige les forces de volume.

Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope (E, ν). On se place dans l'hypothèse des petites perturbations.

Dans le repère orthonormé cartésien $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, on considère un milieu défini par :

$$-L \leq x_1 \leq L \qquad -h \leq x_2 \leq h \qquad 0 \leq x_3 \leq e$$

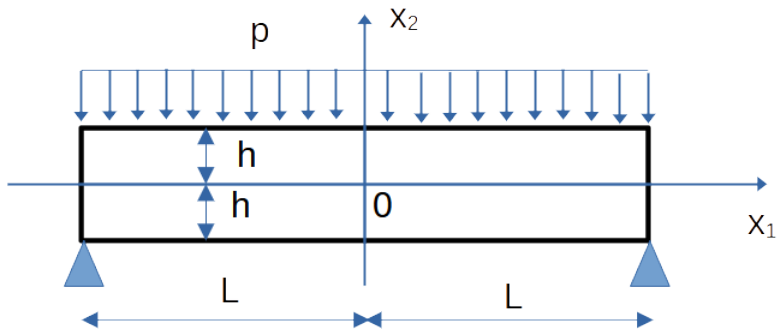

FIGURE 1 – Poutre sur deux appuis subissant une charge répartie dans le plan $(x_1; x_2)$

On cherche à définir la matrice des contraintes en tout point $M(x_1, x_2, x_3)$. On suppose que l'on est en contraintes planes c'est-à-dire que la matrice des contraintes s'écrit dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On s'inspire de la théorie des poutres et on suppose que :

$$\sigma_{11} = (a x_1^2 + c)\, x_2 \qquad \text{avec : } a, c \in \mathbb{R}$$

1. En utilisant les conditions limites pour les faces $x_1 = -L$ et $x_1 = L$, déterminer la constante c.
2. En utilisant les équations d'équilibre donner la forme de la fonction σ_{12}.
3. Utiliser les conditions limites pour les faces $x_2 = -h$ et $x_2 = h$ pour déterminer l'expression de σ_{12} en fonction de a, h , x_1 et x_2.

4. En utilisant les équations d'équilibre donner la forme de la fonction σ_{22}.
5. Utiliser les conditions limites pour les faces $x_2 = -h$ et $x_2 = h$ pour déterminer l'expression de σ_{22} en fonction de p, h et x_2.
6. Dans le reste de l'exercice on suppose que :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{3p}{4h^3}(x_1^2 - L^2)x_2 \\ \sigma_{12} = \dfrac{3p}{4h^3}(h^2 - x_2^2)x_1 \\ \sigma_{22} = \dfrac{p}{4h^3}(x_2^3 - 3h^2x_2 - 2h^3) \end{cases} \tag{4}$$

   On se place dans la section $x_1 = 0$ au milieu de la poutre. Calculer la résultante de la force sur cette face. On ne fait qu'une intégration suivant dx_2 car on est en théorie des poutres.
7. Calculer le moment résultant par rapport au point O sur cette section.On ne fait qu'une intégration suivant dx_2 car on est en théorie des poutres.
8. Quelle sollicitation subit ce milieu ? Justifier votre réponse.
9. Donner l'expression du tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé en utilisant la loi de Hooke.