TE41 - FINAL P2024 - LUNDI 24 JUIN 2024

calculatrice interdite - Formulaire TE41 autorisé

Exercice 1 : Contraintes mécaniques et contraintes thermiques - 11 points

Soit un cube $ABCDA'B'C'D'$ de côté a qui subit une traction bi-axiale sur les faces $BB'C'C$ d'intensité p_1 et $CC'D'D$ d'intensité p_2 où p_1 et p_2 sont des pressions constantes dont l'unité est le Pa ou N/m^2. On suppose que :

1. L'origine du repère est choisi au point A'. On travaille en HPP , en statique et en isotherme.
2. Le matériau est supposé homogène élastique et isotrope.
3. Le poids du cube est négligé.
4. Le déplacement sur la face $AA'DD'$ ($x_1 = 0$) est nul dans la direction $\underline{e}_1$.
5. Le déplacement sur la face $ABB'A'$ ($x_2 = 0$) est nul dans la direction $\underline{e}_2$.
6. Le déplacement sur la face $A'B'C'D'$ ($x_3 = 0$) est nul dans la direction $\underline{e}_3$.
7. Sur la face $BB'C'C$ ($x_1 = a$) le vecteur contrainte est égal à $p_1\,\underline{e}_1$
8. Sur la face $CDD'C'$ ($x_2 = a$) le vecteur contrainte est égal à $p_2\,\underline{e}_2$
9. Sur la face $ABCD$ ($x_3 = a$) est libre d'effort.

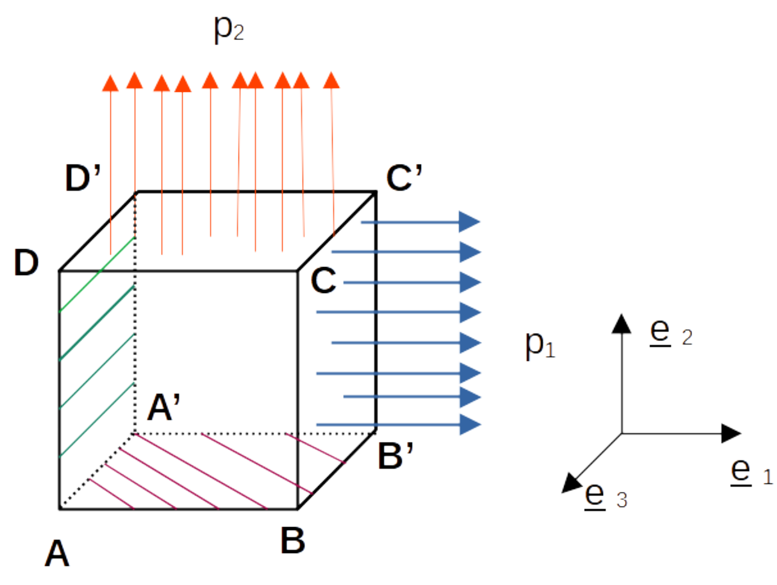

FIGURE 1 – cube sous pression bi-axiale

1. Justifier que la matrice des contraintes de Cauchy s'écrit :(1 point)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2,x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(x_1,x_2,x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1;\underline{e}_2;\underline{e}_3)}$$

2. En utilisant les équations d'équilibre de la statique trouvez la forme de σ_{11} et σ_{22}.(1 point)
3. Utiliser les conditions limites sur les faces $BB'C'C$ et $DCC'D'$ pour trouver complètement ces deux contraintes normales en fonction de p_1 et p_2.(1 point)
4. On suppose que la matrice des contraintes de Cauchy s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \; p_1 \in \mathbb{R}^+ \; et \; p_2 \in \mathbb{R}^+$$

Calculer le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$, en fonction de p_1, p_2 , ν et E, en utilisant la loi de Hooke : (0.5 point)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (tr \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

5. On rappelle que $0 < \nu < 1/2$, Montrer que : (0.5 point)

$$\nu < \frac{1}{\nu}$$

6. Dans les cinq cas suivants, indiquer si le cube travaille en traction ou compression en précisant la direction : (2.5 point)
   (a) Premier cas : $\frac{p_2}{p_1} < \nu$
   (b) Deuxième cas : $\frac{p_2}{p_1} = \nu$
   (c) Troisième cas : $\nu < \frac{p_2}{p_1} < \frac{1}{\nu}$
   (d) Quatrième cas : $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\nu}$
   (e) Cinquième cas : $\frac{1}{\nu} < \frac{p_2}{p_1}$
7. Donner l'expression du vecteur déplacement $\underline{\xi}$ en fonction de p_1, p_2 , ν ,E ,x_1, x_2, x_3 et des constantes d'intégration. (3 points)
8. Utiliser les conditions limites sur le déplacement pour déterminer les constantes d'intégration. (1.5 point)

Exercice 2 : Etude d'un cylindre à base circulaire - 9 points

Les axes O, x_1, x_2, x_3 sont orthonormés. On considère un barreau cylindrique de révolution autour de l'axe Ox_1, de longueur L et dont les bases circulaires de rayon R se trouvent dans les plans $x_1 = 0$ et $x_1 = L > 0$. Ce barreau est en équilibre dans les conditions suivantes :

- matériau homogène et isotrope en isotherme,
- on travaille dans le cadre des hypothèses des petites perturbations en statique,
- on néglige le poids propre,
- vecteur contrainte nul sur la surface latérale.
- on travaille dans la base cartésienne $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ avec le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Le tenseur des contraintes est donné par dans la base cartésienne $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu\,\alpha\,x_3 & \mu\,\alpha\,x_2 \\ -\mu\,\alpha\,x_3 & 0 & 0 \\ \mu\,\alpha\,x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu \text{ et } \alpha = \text{ constantes}$$

1. Montrer que les équations d'équilibre sont vérifiées.(1 point)
2. Vérifier que le vecteur contrainte est nul sur la surface latérale.(1.5 point)
   Indication : on travaille en coordonnées cartésiennes, bien que le solide soit un cylindre.
3. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercées sur la surface S_0 qui correspond au plan $x_1 = 0$.(1.5 point)
4. Calculer le moment par rapport au point O des efforts exercés sur la surface S_L qui correspond au plan $x_1 = L$. (1 point)
5. A quel type de sollicitation correspond cette matrice des contraintes ? (0.5 point)
6. On note la matrice des contraintes dans la base cartésienne $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

   $$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calculer les contraintes principales. (1.5 point)
7. Dessiner les cercles de Mohr associés. (1 point)
8. Remplacer $\sigma_{12} = -\mu\alpha x_3$ et $\sigma_{13} = \mu\alpha x_2$ donner l'expression de τ_{max}. (1 point)