TE41 - FINAL P2025 - MERCREDI 26 JUIN 2025
calculatrice interdite - Formulaire TE41 autorisé

Exercice 1 : Contraintes dans un domaine - 8 points

Dans le repère orthonormé cartésien $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, on considère un milieu défini par :

$$0 \le x \le L \qquad \frac{-h}{2} \le y \le \frac{h}{2} \qquad \frac{-e}{2} \le z \le \frac{e}{2} \tag{1}$$

La section définie par $x = L$ est encastrée. On suppose que les forces de volume sont négligeables et l'état des contraintes en tout point $M(x, y, z)$ est défini dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{P}{eh} - \dfrac{12\,F\,xy}{eh^3} \\ \sigma_{12} = -\dfrac{3\,F}{2eh}\left(1 - \dfrac{4y^2}{h^2}\right) \end{cases}$$

Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope (E, ν). On se place dans l'hypothèse des petites perturbations.

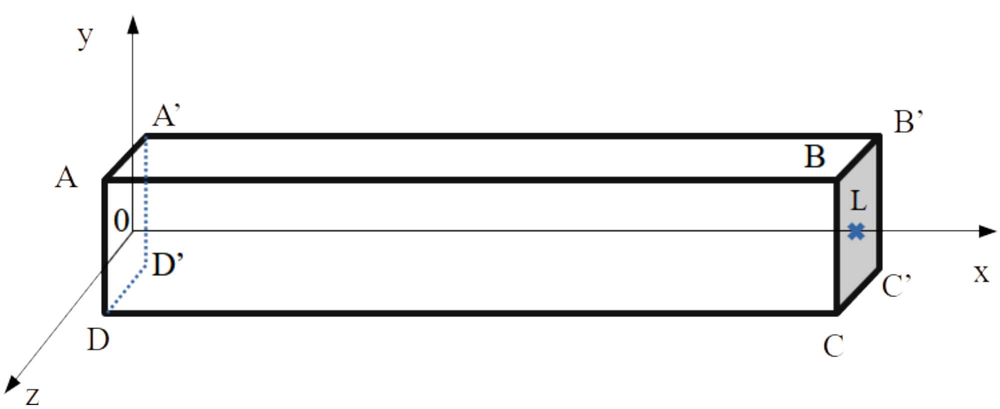

FIGURE 1 – $0 \le x \le L$, $\frac{-h}{2} \le y \le \frac{h}{2}$ et $\frac{-e}{2} \le z \le \frac{e}{2}$

1. Les équation d'équilibre statiques sont-elles vérifiées ? (1 point)
2. Calculer le vecteur contrainte sur la face $ABB'A'$ qui correspond au plan d'équation $y = \frac{h}{2}$. (1 point)
3. Calculer le vecteur contrainte sur la face $CDD'C'$ qui correspond à $y = \frac{-h}{2}$. (0.5 point)
4. Calculer le vecteur contrainte sur la face $ADD'A'$ qui correspond à $x = 0$. (1.5 point)

5. Puis calculer la résultante ou la force sur cette face $ADD'A'$.(1.5 point)
6. Calculer le moment résultant par rapport au point O sur cette face $ADD'A'$. (1 point)
7. Quelle sollicitation subit ce milieu ? Justifier votre réponse. (1 point)
8. Donner l'expression du tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé en utilisant la loi de Hooke. (0.5 point)

Exercice 2 : Compression dynamique d'un quart de cylindre - 17.5 points

On considère un quart de cylindre de rayon R_e et de hauteur H, en appui simple sur sa base et soumis à une compression verticale sous l'effet d'un déplacement vertical descendant imposé , noté V en mètre, sur sa face supérieure.

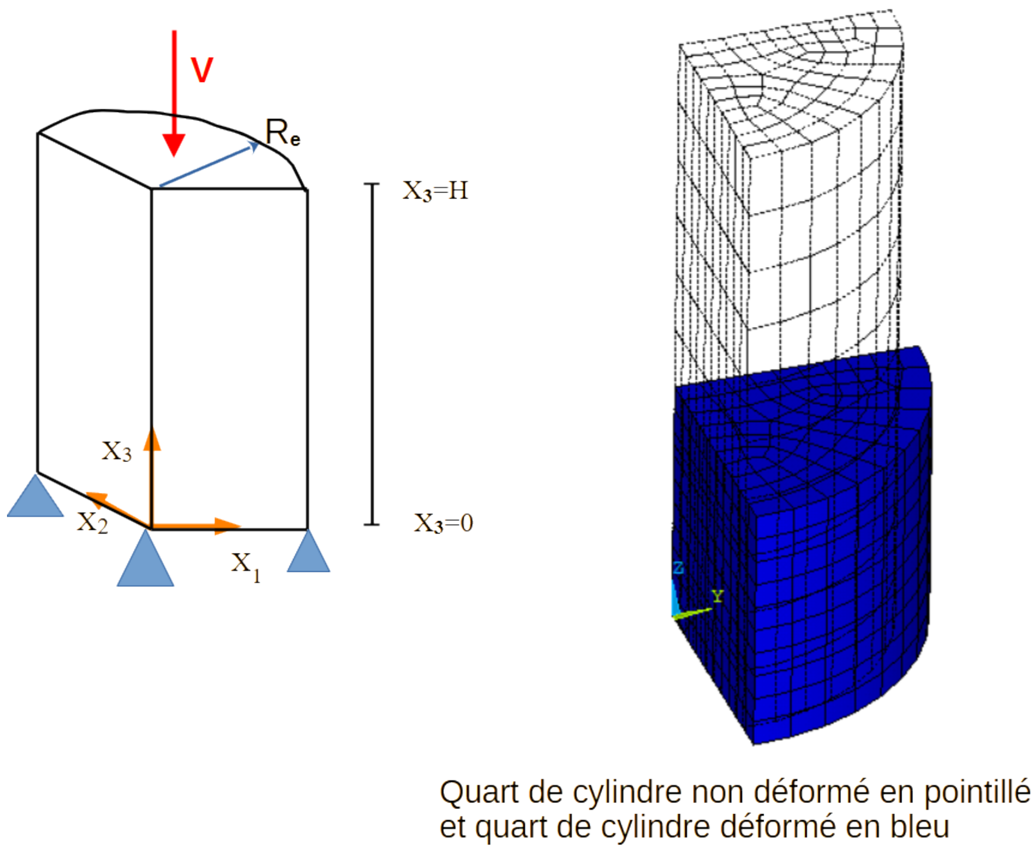

FIGURE 2 – quart de cylindre subissant un déplacement vertical sur la surface supérieure

La face supérieure ($X_3 = H$) est soumise à un déplacement imposé vertical V dépendant du temps, la troisième composante du vecteur déplacement ξ soit ξ_3 s'écrit en $X_3 = H$:

$$X_3 = H : \qquad \xi_3 \; = \; V(t) \tag{2}$$

où $V(t)$ est défini par :

$$\begin{cases} \text{avec :} \qquad V(t) = (a(t) \, - \, 1)\, H \quad ; \quad a(t) = \left(\dfrac{h}{H} - 1\right) \dfrac{t}{T} + 1 \\ \text{où :} \qquad 0 < h < H \quad \text{et} \quad T > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le quart de cylindre est constitué d'un matériau homogène, élastique et isotrope ayant pour coefficients de Lamé (λ, μ) et pour masse volumique ρ_0. Les coordonnées lagrangiennes sont notées $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ et les coordonnées eulériennes $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

On négligera les forces volumiques $\underline{f}$, on travaillera sans contraintes initiales et sans élévation de température. On suppose travailler en HPP donc avec le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Le quart de cylindre comporte 5 faces. Trois d'entre elles sont en appui simple (cf. figure 2 de gauche et figure 3) :

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 = 0 : & \xi_1 & = 0 \\ X_2 = 0 : & \xi_2 & = 0 \\ X_3 = 0 : & \xi_3 & = 0 \end{array}\right. \qquad \text{où} \quad \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

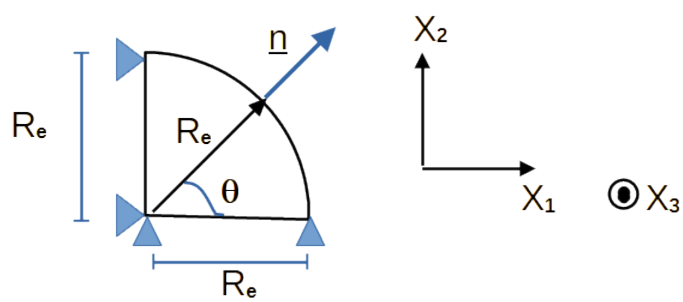

FIGURE 3 – Conditions limites sur 3 des faces du cylindre

Enfin, la face cylindrique est libre d'effort c'est-à-dire que le vecteur contrainte est nul :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}) \,.\, \underline{n} = \underline{0} \quad \forall \, \underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & R_e \cos(\theta) \\ X_2 & = & R_e \sin(\theta) \end{array}\right. \qquad \text{et : } 0 \leq \; X_3 \; \leq \; H \,;\, \theta \in [0 \, \frac{\pi}{2}]$$

où : $\underline{\underline{\sigma}}$ représente le tenseur des contraintes et $\underline{n}$ la normale extérieure unitaire

Compte tenu des conditions aux limites et de la symétrie du problème, on fera l'hypothèse que la transformation est homogène avec :

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \beta(t) \, X_1 \\ \beta(t) \, X_2 \\ a(t) \, X_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

où $a(t)$ est défini par (3) et $\beta(t)$ n'est pas connu à ce stade de l'exercice.

1. Montrer qu'à l'instant $t = T$, en utilisant (3) et (6), on a (1 point) :

$$x_3(X_3 = H) = h$$

2. On rappelle que : $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$. En utilisant (6), calculer le champs des déplacements $\underline{\xi}$ en fonction de a , β , X_1 , X_2 et X_3 (0.5 point).

3. Montrer que le champs de déplacement trouvé à la question 2 satisfait les conditions limites (2) et (4). (1 point)

4. Calculer le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de a et β. (1 point)

5. On rappelle que :
$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \, tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \, \underline{\underline{1}} + 2\mu \, \underline{\underline{\varepsilon}}$$
Calculer alors le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de a, β et des coefficients de Lamé. (1.5 point)

6. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement et en rappelant que l'on néglige les forces de volume :
$$\rho_0 \frac{d^2 \underline{\xi}}{dt^2} = \underline{DIV} \, (\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}$$
Montrer que : (1 point)
$$\beta(t) = \beta_1 \, t + \beta_0 \quad ; \quad a(t) = a_1 \, t + a_0$$
où β_1 , β_0, a_1 et a_0 sont des constantes.

7. En utilisant la définition de $a(t)$ donnée par l'équation (3), montrer que : (1 point)
$$a_1 = \left(\frac{h}{H} - 1 \right) \frac{1}{T} \qquad \text{et} \qquad a_0 = 1$$

8. En utilisant les question (2) et (6) avec la valeur initiale du déplacement à $t = 0$, montrer que : (0.5 point)
$$\beta_0 = 1$$

9. En vous aidant de la figure 3 exprimer la normale extérieure unitaire $\underline{n}$ de la surface cylindrique en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. (1 point)

10. En utilisant la condition de bord libre (5) ainsi que l'équation (3), montrer que : (2 points)

$$\beta_1 = \nu\,(1 - \frac{h}{H})\frac{1}{T}$$

où ν représente le coefficient de Poisson. On rappelle que : $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

11. En utilisant les questions (5), (6), (7), (8) et (10), montrer que la composante σ_{33} à l'instant $t = T$ est : (2.5 points)

$$\sigma_{33}(t = T) = E\,(\frac{h}{H} - 1)$$

On rappelle que :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(\nu+1)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(\nu+1)}$$

12. On note r le rayon eulérien et R le rayon lagrangien d'un point dans le cylindre. En utilisant (6) montrer que : (1 point)

$$r = \beta(t)\,R$$

13. En utilisant (6), calculer la vitesse eulérienne $\underline{u}^E$ en fonction de β , $\dot{\beta}$, a ,$\dot{a}$, x_1 , x_2 et x_3. (0.5 point)

14. Calculer la masse volumique en configuration déformée en fonction de ρ_0, β et a en utilisant la conservation de la masse en coordonnées eulériennes. (2 points)

15. Calculer la masse volumique en configuration déformée en fonction de ρ_0, β et a en utilisant la conservation de la masse en coordonnées lagrangiennes. Comparer avec la question précédente. (1 point)