

TE41 - FINAL P2026 - MARDI 23 JUIN 2026

calculatrice et appareil connecté interdits

Formulaire TE41 autorisé

Exercice 1 : Question de cours - 4 points

Pour un matériau homogène, élastique et isotrope la relation entre le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ est donnée par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (tr \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \quad (1)$$

Le but de cet exercice est de trouver la relation entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et d'en déduire l'expression des coefficients de Lamé $(\lambda; \mu)$ en fonction de $(E; \nu)$.

1. Donner l'expression de la trace de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de la trace de $\underline{\underline{\sigma}}$.
2. Reporter cette expression dans l'équation (1).
3. Donner alors l'expression de la loi de Hooke reliant $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.
4. Cette loi s'écrit aussi en introduisant les coefficients de Lamé :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2)$$

En déduire l'expression de λ et μ en fonction de E et ν .

Exercice 2 : Equilibre d'un barrage - 9 points

On considère un barrage OAB représenté sur la figure 1. Ses dimensions sont h suivant la direction $\underline{e}_1$ et h suivant la direction $\underline{e}_2$. Ce barrage est ancré sur la partie AB (déplacement nul) et il supporte une pression p répartie linéairement sur la face OA (cf. figure 1). La face OB est libre d'effort.

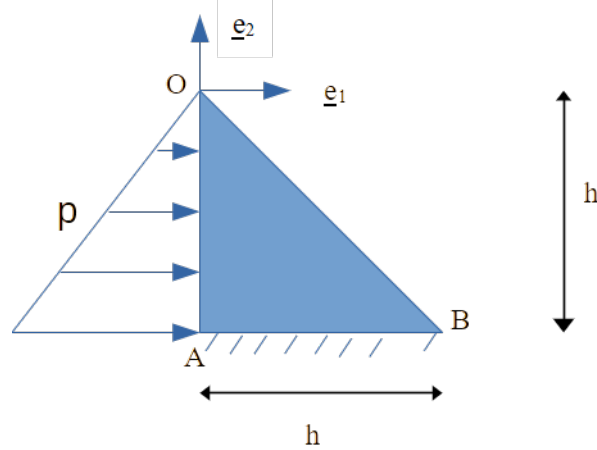


FIGURE 1 – Barrage sous pression triangulaire

Hypothèses :

- hypothèses des petites perturbations.
- état isotherme.
- pas de forces volumiques.
- matériau homogène, élastique et isotrope.

Questions :

1. On cherche $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base $(\underline{e}_1; \underline{e}_2; \underline{e}_3)$ sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2) = \alpha \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & -(2x_1 + x_2) & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu x_1 \end{pmatrix}$$

où α est une constante et ν le coefficient de Poisson.

Vérifier que $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfait les équations d'équilibre du problème.

2. Montrer que l'expression de la pression $\underline{P}(x_2)$ appliquée sur la face OA en fonction de p , x_2 et h (cf. figure 1) est :

$$\underline{P}(x_2) = \left(\frac{p}{h} x_2 \right) \underline{e}_1$$

3. Donner l'expression de α en fonction de p et h en utilisant les conditions aux limites.

4. Calculer le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (tr \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

où E représente le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

5. Caractériser en une phrase l'état de déformations sur le barrage considéré.
6. Calculer le champ de déplacement $\underline{\xi}$ associé.

Exercice 3 : QCM à choix unique 7 points

Bonne réponse +1 - Mauvaise Réponse -1 - pas de réponse 0.

1. En transformation isochore, on a :
 - (a) $\rho(t) = \rho_0 \times t$
 - (b) $div(\underline{u}^E) = 0$
 - (c) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho$
 - (d) On ne peut rien dire.
2. Les équations de compatibilités sont automatiquement vérifiées si :
 - (a) Si les composantes du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont de degré 2.
 - (b) SSi les composantes du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont le produit de x_i de degré 1, par exemple $x_1 x_2 x_3$.
 - (c) Si les composantes du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont de degré 1.
 - (d) On ne peut rien dire.
3. Dans la configuration déformée, on utilise le tenseur des contraintes :
 - (a) de Cauchy
 - (b) premier tenseur de Piola Kirchoff
 - (c) second tenseur de Piola Kirchoff
4. Dans le repère orthonormé cartésien $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, on considère un milieu défini par :

$$0 \leq x \leq L \quad \frac{-h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \quad \frac{-e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}$$

La section définie par $x = L$ est encastree. On suppose que les forces de volume sont négligeables et l'état des contraintes en tout point $M(x, y, z)$ est défini dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ par :

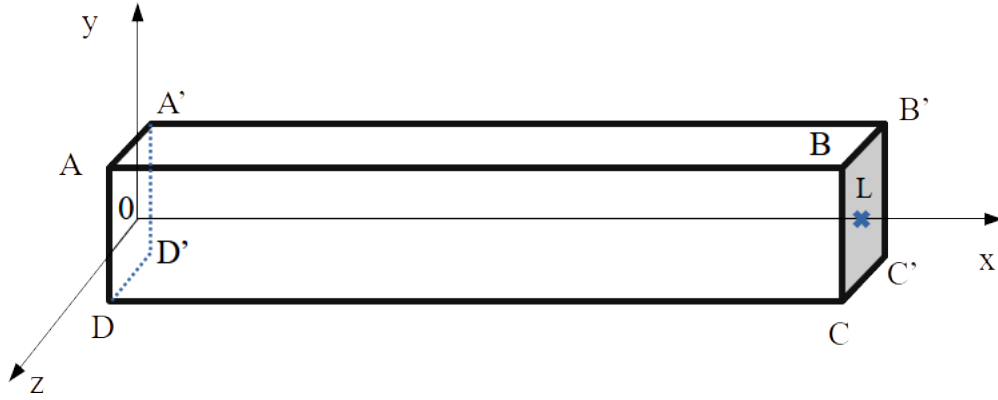


FIGURE 2 – $0 \leq x \leq L$, $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$ et $-\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \frac{P}{eh} - \frac{12 F xy}{eh^3} \\ \sigma_{12} = -\frac{3 F}{2eh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \end{cases}$$

Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope (E, ν). On se place dans l'hypothèse des petites perturbations.

Le vecteur contrainte sur la face $ABB'A'$ qui correspond au plan d'équation $y = \frac{h}{2}$ est :

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -P \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} F \\ P \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Pour le même problème, la résultante ou la force sur la face $ABB'A'$ est égale à :

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -P \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} F \\ P \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Le moment résultant par rapport au point O sur la face $AA'D'D$ est égal :

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -PL \\ FL \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} FL \\ PL \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Cette poutre travaille en :

a) traction

b) flexion simple

c) torsion

d) traction + flexion