TE41- MEDIAN P08

Durée 2 heures - UTBM 6 Mai 2008 - feuille A4 autorisée

exercice 1 : Calcul tensoriel - 4 points

Rappel :

$$\underline{rot}\,\underline{u} = \delta_{ijk}\,u_{k,j}\,\underline{e}_i$$

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \delta_{ijk}\,a_i\,b_j\,\underline{e}_k$$

$$\delta_{ijk}\,\delta_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

1. Montrer que :

$$\frac{1}{2}\,\underline{rot}\,\underline{u} \wedge \underline{dx} = \frac{1}{2}\,(\underline{\underline{grad}}\,\underline{u} - (\underline{\underline{grad}}\,\underline{u})^t)\,.\,\underline{dx}$$

2. Calculer :

$$\underline{rot}\,(\underline{grad}\,f(\underline{x},t))$$

3. Montrer que l'accélération eulérienne $\underline{\Gamma}$ peut s'écrire en fonction de la vitesse eulérienne $\underline{u}(\underline{x},t)$ sous la forme :

$$\underline{\Gamma}(\underline{x},t) = \frac{\partial\,\underline{u}(\underline{x},t)}{\partial t} + \underline{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \underline{rot}(\underline{u}) \wedge \underline{u}$$

exercice 2 : Calcul d'un champ de déplacement - 5 points

Soit le tenseur des déformations linéarisé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & bx & 0 \\ 0 & 0 & bx \end{pmatrix} \quad \text{où} \;\; a, b \in \Re$$

1. Les équations de compatibilité sont-elles vérifiées ?

2. Calculer la partie anti-symétrique du tenseur des déplacements $\underline{\underline{\omega}}$.

3. Donner l'expression du tenseur des déplacements $\underline{\xi}$.

4. Le tenseur des déplacements est-il déterminer de facon unique? Justifier.

exercice 3 : Déformations non homogènes dans une sphère creuse - 11 points

On considère une sphère creuse de rayon interne A et de rayon externe B, soumise à un chargement axisymétrique de telle sorte que l'on peut admettre que la déformation est purement radiale :

$$\underline{x} = f(R)\,\underline{X}$$

où $\underline{x}$ représente les coordonnées eulériennes, $\underline{X}$ représente les coordonnées lagrangiennes et f une fonction scalaire positive du rayon lagrangien R :

$$R = ||\underline{X}||$$

1. Montrer que :
$$\frac{\partial R}{\partial X_j} = \frac{X_j}{R}$$

2. En déduire que la matrice $\underline{\underline{F}}$, gradient des déformations, s'écrit sous la forme :
$$\underline{\underline{F}} = \frac{f'(R)}{R}\underline{X} \otimes \underline{X} + f(R)\,\underline{\underline{1}}$$

3. Montrer que la matrice $\underline{\underline{F}}$ s'écrit :
$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \alpha X_1^2+\beta & \alpha X_1X_2 & \alpha X_1X_3 \\ \alpha X_1X_2 & \alpha X_2^2+\beta & \alpha X_2X_3 \\ \alpha X_1X_3 & \alpha X_2X_3 & \alpha X_3^2+\beta \end{pmatrix}$$
où on a posé $\alpha = \dfrac{f'(R)}{R}$ et $\beta = f(R)$.

4. La transformation est-elle homogène ? Expliquer.

5. Montrer que :
$$\underline{X} \otimes \underline{X}\,.\,\underline{X} = R^2\,\underline{X}$$

6. Montrer que $\underline{X}$ est un vecteur propre de $\underline{\underline{F}}$. En déduire la valeur propre simple associée, que l'on notera λ_1.

7. Montrer que :
$$\lambda_1 = \frac{dr}{dR}$$
où r représente le rayon eulérien déformé : $r = ||\underline{x}||$.

8. On considère le sous espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension 2 et perpendiculaire à $\underline{X}$. Soit $\underline{v} \in \mathcal{V}$, montrer que :
$$\underline{X} \otimes \underline{X}\,.\,\underline{v} = \underline{0}$$

9. Montrer que $\underline{v}$ est un vecteur propre de $\underline{\underline{F}}$. En déduire la valeur propre double associée, que l'on notera λ_2.

10. Montrer que :

$$\lambda_2 = \frac{r}{R}$$

11. Calculer les dilatations principales δ_I , δ_{II} , δ_{III}.

12. On suppose que la transformation est isochore. On rappelle que le déterminant est invariant par changement de base. Le déterminant de $\underline{\underline{F}}$ peut donc être calculé dans la base des vecteurs propres. Montrer que :

$$r^3 - R^3 = \text{constante}$$

13. On note a le rayon interne déformé de la sphère. Montrer que :

$$r^3 = R^3 + a^3 - A^3$$