Médian TE41 2018

Durée 2 heures - Formulaire de cours autorisé

UTBM 2 Mai 2018

Exercice 1 : Algèbre tensorielle - 4 points

1. A-t-on le droit d'écrire ? Justifier. Si l'expression est valable indiquez combien il y a d'équations :
   (a) $a_r\, b_s \;=\; c_r\,(d_s \;-\; f_s)$
   (b) $a_i \;=\; b_j\, c_i\, d_i$
2. On admet que :
$$\delta_{ijk}\,\delta_{pqr} \;=\; \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$
   où $|\,.\,|$ représente le déterminant de la matrice. Montrer alors que :
$$\delta_{ijk}\,\delta_{pqk} \;=\; \delta_{ip}\delta_{jq} \;-\; \delta_{iq}\delta_{jp}$$
3. Simplifiez l'expression : $\delta_{ij}\,\delta_{jk}\,\delta_{kl}\,\delta_{li}$
4. Soit $\underline{w}$ un tenseur d'ordre 1 qui dépend de $\underline{x}$, calculer en détaillant les calculs :
$$div(\underline{rot}\,(\underline{w}))$$
5. Soit $\underline{OM} \;=\; x_i\,\underline{e}_i$ et $\underline{A}$ un vecteur constant, calculer $\underline{rot}\,(\underline{x} \wedge \underline{A})$
6. On pose $r \;=\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ calculer :
   (a) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{x_j}{r}\right)$
   (b) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{x_i}{r}\right)$

Exercice 2 : trajectoires, lignes de courant - 4 points

On note X_i les coordonnées d'un point à l'instant $t = 0$ dans la configuration non déformée et x_i ses coordonnées dans la configuration déformée. Soit la description lagrangienne suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^t \quad + \frac{1}{2}(X_1 - X_2)\, e^{-t} \\ x_2 & = & \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^t \quad - \frac{1}{2}(X_1 - X_2)\, e^{-t} \\ x_3 & = & X_3 \end{array}\right.$$

1. Donner la description lagrangienne du mouvement $\underline{U}^L = \underline{U}^L(\underline{X}\,,\, t)$.
2. Donner la description eulérienne du mouvement $\underline{U}^E = \underline{U}^E(\underline{x}\,,\, t)$.
3. Déterminer les lignes de courant de l'écoulement.
4. Déterminer les trajectoires des particules.

Exercice 3 : champ de déplacements - 4 points

Soit le champ des déformations linéarisées :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} c_1\, x_1\, (x_1^2 + x_2^2) & c_3\, x_1^2 x_2 & 0 \\ c_3\, x_1^2 x_2 & \frac{1}{3}\, c_2\, x_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes réelles.

1. Sous quelles conditions, les équations de compatibilité sont-elles vérifiées ?
2. On prend $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, déterminer alors le champ de déplacement $\underline{\xi}$ associé.
3. Ce déplacement est-il unique ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 : déformations principales - 8 points

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(0, \underline{e}_1 , \underline{e}_2 , \underline{e}_3)$, un milieu continu subit une déformation entre les instants 0 et t telle que la représentation lagrangienne du mouvement soit donnée par :

$$\begin{cases} x_1 &= X_1(1 + X_2) \\ x_2 &= X_2(1 + 3X_1) \\ x_3 &= X_3 \end{cases}$$

1. Déterminer $\underline{\underline{F}}$.
2. L'hypothèse de la MMC est-elle vérifiée ?
3. La transformation est-elle homogène ?
4. La transformation est-elle isochore ?
5. Déterminer le tenseur de dilatation de Cauchy $\underline{\underline{C}}$.
6. Déterminer le tenseur des déformation de Green Lagrange $\underline{\underline{e}}$.
7. On se place au point $A(0; 1; 0)$, calculer $\underline{\underline{e}}$ en A et les déformations principales associées e_I, e_{II}, e_{III}, rangées dans l'ordre croissant.
8. Déterminer les directions principales associées telles que $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ forment une base orthonormée directe.
9. Soit à $t = 0$ un carré de côté 1 dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Représentez sur le même dessin le carré non déformé et sa déformée.
10. A quelle sollicitation correspond cette déformation ?