

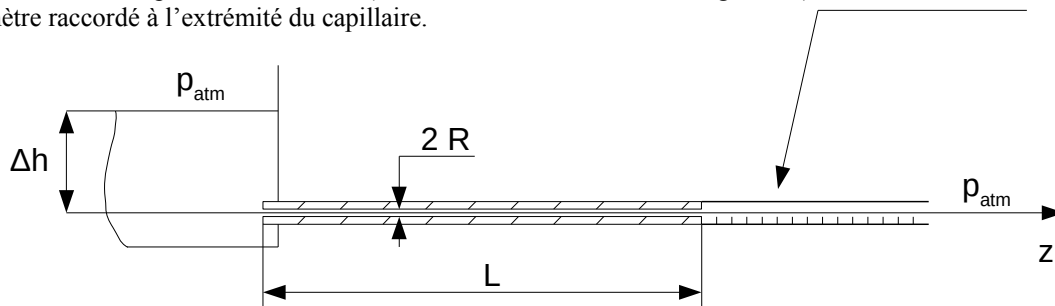
I] Questions de cours (5 points).

Répondre de façon courte. La réponse doit néanmoins être argumentée.

- 1) Que peut-on dire de σ_{ij} et σ_{ji} lorsque $i \neq j$?
- 2) Quelle est la principale différence entre un palier hydrodynamique et un palier hydrostatique ?
- 3) Que peut-on dire lorsqu'un faisceau de lignes de courant est convergent ?
- 4) Que peut-on dire des réseaux des équipotentielles et des lignes de courant en tout point d'un écoulement potentiel ?
- 5) Quelle propriété ont les profils de vitesse dans la couche limite laminaire d'une plaque plane sans incidence, loin du bord d'attaque ?

II] Viscosimètre capillaire (10 points).

Un viscosimètre capillaire se compose d'un grand réservoir ouvert à la pression constante p_{atm} contenant le liquide à tester, d'un tube capillaire horizontal (diamètre intérieur $D = 2R$, longueur L) et d'un tube de verre gradué de grand diamètre raccordé à l'extrémité du capillaire.



Le principe de l'appareil consiste à mesurer le débit-volume q_v qui sort de l'appareil en suivant l'avancée du ménisque dans le tube de verre gradué pendant une durée connue.

On note Δh la différence de hauteur entre la surface libre et l'axe du capillaire.

Pour mémoire, un tube capillaire est un tube de très faible diamètre ($2R \ll L$).

- 1) Proposez et justifiez l'ensemble des hypothèses nécessaires à l'étude de **l'écoulement dans le capillaire**.
- 2) Exprimez le système défini d'équations qui gouvernent ce problème et simplifiez-le. Commentez le résultat.
- 3) Résolvez l'équation obtenue en explicitant les conditions aux limites.
- 4) Exprimez la vitesse moyenne dans une section du capillaire. Commentez le signe de l'expression.
- 5) On réalise une mesure avec un liquide de masse volumique $\rho_0 = 900 \text{ kg/m}^3$. Le ménisque avance de 7 cm en 1min 56s dans le tube de verre dont le diamètre est de 4 mm.

Le rayon du tube capillaire est, quant à lui, égal à 0,15 mm et la longueur est $L = 40 \text{ cm}$.

La valeur de Δh conduit à une différence de pression motrice entre l'entrée (e) et la sortie (s) du capillaire est $p_{ge} - p_{gs} = 65 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

- a) Calculez le débit-volume q_v .
- b) Calculez la viscosité cinématique ν_0 du liquide.
- c) Quel commentaire vous inspire le résultat ?

Extraits du formulaire :

On rappelle que : $\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$ $\bar{U} = \frac{1}{S} \int_S U da$

Équation de continuité en coordonnées cylindriques : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Équations de projection de Navier – Stokes en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_g}{\partial r} + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_g}{\partial \theta} + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_g}{\partial z} + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

III] Potentiel complexe (5 points).

On considère l'écoulement représenté par le potentiel complexe $f(z)$ de la variable complexe z tel que :

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2$$

- 1) Énoncez les hypothèses qui vous semblent opportunes pour étudier la cinématique de cet écoulement.
- 2) Exprimez à partir de $f(z)$ le potentiel des vitesses φ et la fonction de courant Ψ en fonction de r et θ puis en fonction de x et y .
- 3) Pour $-6 \leq x \leq 6$, tracez les lignes de courant suivantes : $\Psi = -6$; $\Psi = -1$; $\Psi = 1$ et $\Psi = 6$. Vous respecterez impérativement l'échelle suivante : 2 carreaux (soit 1 cm) par unité pour les deux axes.
Quel écoulement est simulé ici ?
- 4) On imagine que deux parois ont exactement la forme des lignes de courant $\Psi = 1$ et $\Psi = 6$. Exprimez puis calculez le débit-volume q_v par unité de profondeur qui circule entre ces parois.

Questions bonus (2pts).

Démontrez que l'écoulement vérifie l'équation de continuité.

Démontrez que l'écoulement est irrotationnel.

Formules trigonométriques et rappels de cours :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = u - i v$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$