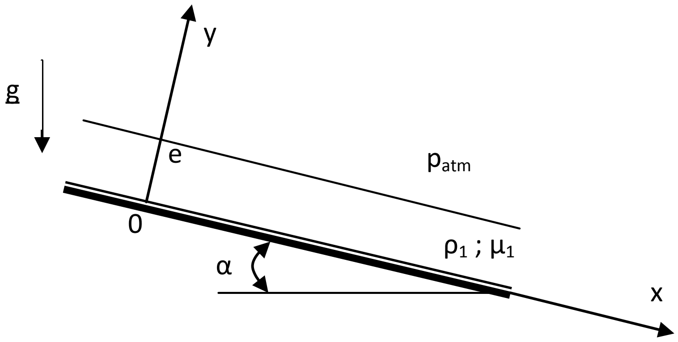
TF 40 | Examen Final | Le 16/01/2014

Durée : 2 heures ; le formulaire de TD est le seul document autorisé.

La partie A est à rédiger sur copie séparée.

A) *(10 pts + 2 pts pour les questions bonus)*

On considère l'écoulement d'un liquide sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Le liquide a une masse volumique $\rho_l = 998$ kg/m^3, une viscosité cinématique $\nu_l = 1{,}008.10^{-6}$ m^2/s et une viscosité dynamique $\mu_l = 1.10^{-3}$ Pa.s. La surface libre du liquide est en contact avec l'atmosphère, à la pression p_{atm} et l'épaisseur e = 2 mm.

A1) Expliquez à quelles conditions (sans faire de calculs) l'écoulement-il est gouverné par l'équation de Poiseuille dans le cas plan.

Pour mémoire, si $\underline{U}(\underline{x},t) = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y + w\underline{e}_z$ alors l'équation de Poiseuille s'exprime par : $\dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{dp_g}{dx}$

A2) Sachant que l'on néglige le frottement visqueux entre l'air et le liquide, résoudre cette équation et exprimer la vitesse en tout point de l'écoulement en fonction la variation de pression motrice.

On rappelle que : $\sigma_{ij} = 2\mu_0\, d_{ij}$ lorsque $i \neq j$ et que $d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ d'où : $\sigma_{ij} = \mu_0\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$.

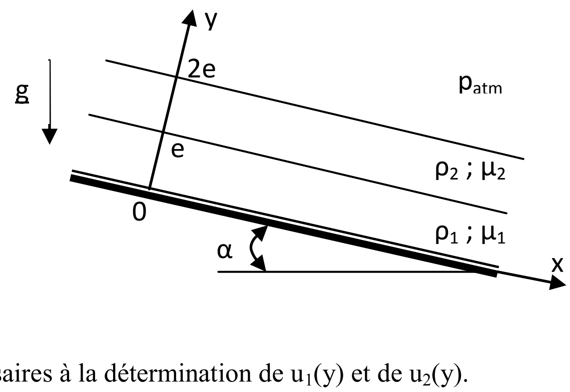
A3) On a vu en TD que $\dfrac{dp_g}{dx} = -\rho_1 g \sin\alpha$. En déduire l'expression de la vitesse en fonction de α et son expression pour y = e.

A4) Déterminer l'expression du débit-volume par unité de largeur Q.

A5) Calculer α dans le cas où Q = 0,1 l/s.m. Exprimer le résultat en degrés. Que pensez-vous du résultat ?

A6) On considère maintenant le cas où un second liquide est présent comme le montre le schéma suivant.

Ce second liquide est non miscible avec le premier, de masse volumique inférieure $\rho_2 = 860$ kg/m^3, de viscosité dynamique $\mu_2 = 5.10^{-3}$ Pa.s et son épaisseur e est identique.



On note qu'il y a adhérence à l'interface entre les deux liquides de telle sorte qu'il y a :

- continuité des contraintes (les liquides exercent l'un sur l'autre à l'interface des contraintes opposées et de même intensité)
- continuité des vitesses (c'est-à-dire que deux particules fluide situées de part et d'autre de l'interface ont la même vitesse).

a) Exprimer l'ensemble des conditions aux limites nécessaires à la détermination de $u_1(y)$ et de $u_2(y)$.

Questions bonus:

b) Déterminer les expressions de $u_1(y)$ et de $u_2(y)$ en utilisant les informations de la question A3 et en sachant que p_{g2} varie de façon similaire à p_{g1}.

c) Tracer les deux profils de vitesse sur un même graphe dans le cas où α = 0,22° et donner la valeur de la vitesse à l'interface et à la surface libre.

B) Similitude *(3 pts)*.

Une maquette à l'échelle 1/10° d'un petit avion de tourisme est essayée en soufflerie où la vitesse en amont, V_1 = 80m/s, est uniforme. Une dimension caractéristique de l'avion est la corde de l'aile (largeur à l'emplanture): D_2 = 1,7m. Une vitesse caractéristique de l'avion est V_2 = 72,5m/s. Dans les deux cas l'écoulement a lieu dans l'air dans les conditions normales.

B1) En comparant les nombres de Reynolds de la maquette et de l'avion réel que peut-on dire des conditions de similitude ?
B2) On souhaite équiper la maquette d'un moteur qui entraîne une hélice homologue. L'hélice réelle tourne à 2200t/mn (diamètre 1,8m). Quelle doit être la vitesse de rotation de l'hélice de la maquette ?

C) Ecoulement potentiel avec circulation *(7 pts + 2 pts pour les questions bonus)*.

On étudie l'écoulement généré par la fonction complexe :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}(q + i\Gamma)lnz$$

où z est un nombre complexe, q est un débit par unité de hauteur et Γ la circulation de la vitesse le long d'une courbe fermée entourant l'origine (q et Γ constantes réelles positives).

C1) Quelles sont les autres hypothèses de l'étude ?
C2) L'écoulement est la superposition de deux écoulements simples, quels sont-ils ?
C3) Donner $\varphi(r, \theta)$ et $\psi(r, \theta)$. A quoi servent ces fonctions ?
C4) Calculer les composantes de la vitesse en coordonnées polaires, $u_r(r, \theta)$ et $u_\theta(r, \theta)$, à partir des composantes de :

$$\underline{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\underline{e_r} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\theta}\underline{e_\theta}.$$

C5) On forme : $tan\alpha = \frac{u_r}{u_\theta}$, montrer que α est une constante. Faire une figure en *M* avec $\underline{e_r}$ et $\underline{e_\theta}$ en y plaçant la vitesse $\underline{U}$ et l'angle α.
C6) On considère la ligne de courant définie par $\psi = -\frac{\Gamma A}{2\pi}$ où A est une constante réelle positive :
montrer que $lnr = \theta tan\alpha + A$.
C7) En prenant l'exponentielle des deux membres, montrer que cette dernière expression peut se mettre sous la forme : $r = r_0 a^\theta$ (spirale logarithmique). Donner les valeurs de ψ et a pour : r_0 = 2m, q = 1m^2.s^{-1} et Γ = 4 m^2.s^{-1}.

<u>Questions bonus :</u>
C8) Tracer les points de cette ligne de courant pour $\theta = k\frac{\pi}{4}$ avec k = 0 à 8.
C9) Pour r < 0,1 m de l'eau s'évacue vers les égouts par un puisard circulaire lors d'une inondation. L'épaisseur de la nappe d'eau est de 0,3m. Expliquer en quoi l'étude précédente peut représenter l'écoulement. Quel est alors le débit-volume d'eau qui s'évacue par le puisard ?

Rappel :

$$e^{m+n} = e^m e^n \text{ et } e^{pq} = (e^p)^q$$