TF 40 Examen Final Le 12/01/2015

Durée : 2 heures ; aucun document autorisé.

La partie C est à rédiger sur copie séparée.

A) EFFET MAGNUS (7,5 pts)**.**

On étudie l'écoulement potentiel autour d'un cylindre de rayon a avec circulation Γ_0. On rappelle que cet écoulement est généré par la fonction complexe f(z) avec $z = re^{i\theta}$:

$$f(z) = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma_0}{2\pi} ln\left(\frac{z}{a}\right)$$

A1) Quelles sont les hypothèses de l'étude ?

A2) Ecrire la fonction potentiel des vitesses $\varphi(r,\theta)$, en déduire les composantes de la vitesse, en coordonnées polaires, $u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$ et $u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$.

A3) Montrer que lorsque $r \to \infty$ on a $\underline{U} = U_\infty \underline{e}_x$.

A4) Montrer que lorsque $r = a$ on a $u_r = 0$ et $u_\theta = -2U_\infty sin\theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi a}$.

A5) On utilise comme force élémentaire s'exerçant sur un élément de paroi da du cylindre de hauteur b l'expression suivante : $\underline{dF} = -(p(\theta) - p_\infty)\underline{e}_r da$ avec $da = abd\theta,\ p_\infty$ étant la pression lorsque $r \to \infty$. Expliquer pourquoi on peut introduire p_∞ dans cette relation si le but poursuivi est d'obtenir par intégration l'effort exercé par le fluide sur le cylindre.

A6) En utilisant Bernoulli, exprimer $(p(\theta) - p_\infty)$ en fonction des autres données du problème (on néglige l'effet des variations d'altitude). Montrer qu'en posant $\Gamma_0 = k2\pi aU_\infty$ on peut écrire les composantes cartésiennes de $\underline{F}$ sous la forme :

$$F_x = -\rho_0 ab\frac{U_\infty^2}{2}\int_0^{2\pi}[1 - (k - 2sin\theta)^2]cos\theta d\theta$$

$$F_y = -\rho_0 ab\frac{U_\infty^2}{2}\int_0^{2\pi}[1 - (k - 2sin\theta)^2]sin\theta d\theta$$

A7) Montrer que l'on a $F_x = 0$ et $F_y = -\rho_0 U_\infty b\Gamma_0$. Ce résultat constitue le théorème de Kutta–Joukowski, expliquer quelles en sont les applications les plus importantes.

Formules utiles : $\int sinxcosxdx = \frac{sin^2x}{2}$; $\int sin^2xcosxdx = \frac{sin^3x}{3}$; $\int sin^2xdx = \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4}$; $\int sin^3xdx = \frac{cos^3x}{3} - cosx$.

B) INFLUENCE DU FROTTEMENT SUR LE COEFFICIENT DE TRAINEE (2,5 pts)**.**

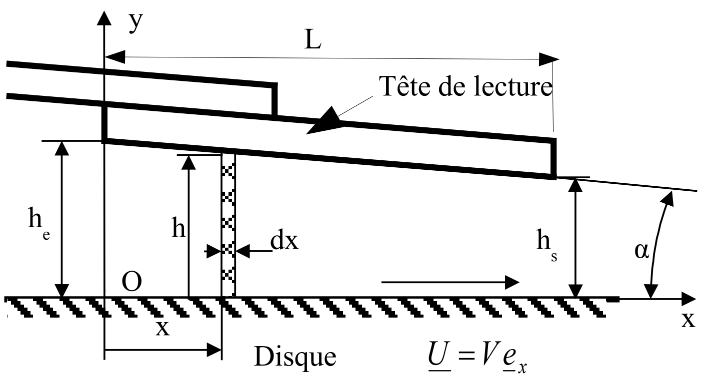
On étudie le Cx d'un corps en forme de parallélépipède rectangle de longueur L suivant x, de hauteur e suivant y et de largeur b suivant z. Ce corps est immergé dans un écoulement d'air de vitesse $\underline{U} = U_\infty \underline{e}_x$ avec $U_\infty = 30$ m.s^{-1} constante en dehors des couches limites sur les faces latérales, d'une petite région en amont du bord d'attaque et du sillage derrière l'obstacle. On précise que la longueur L est telle que $Re_L = 5.10^5$ avec $\nu_0 = 1{,}51.\,10^{-5}$ m^2.s^{-1} pour la viscosité cinématique de l'air, $e = 10^{-2}$m et b = 0,5m. Le bord d'attaque est arrondi afin d'éviter tout décollement des couches-limites sur les faces latérales, mais on ne tient pas compte de cet arrondi afin de simplifier les calculs. On note $F_x = F^p + F^f$ l'effort total de traînée décomposé en une traînée de pression F^p et une traînée de frottement F^f, avec les définitions suivantes :

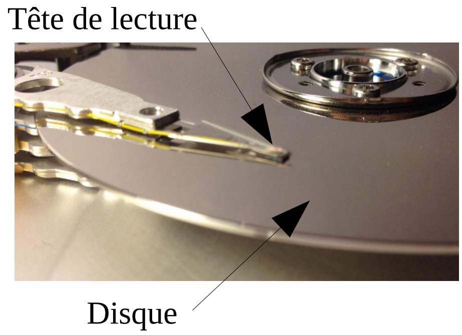
$$F^p = \frac{1}{2}\rho_0 U_\infty^2 SCx^p\ ;\ F^f = \frac{1}{2}\rho_0 U_\infty^2 S'Cx^f\ ;\ F_x = \frac{1}{2}\rho_0 U_\infty^2 SCx\ ;$$

Le Cx^f de frottement a été vu en cours : $\frac{1}{2}Cx^f = 0{,}664 Re_L^{-1/2}$, le Cx^p de pression vaut 1,16 ; S est la surface eb du maître-couple de l'obstacle, S' est la surface frottante, soit les 4 faces parallèles à la vitesse.

B1) Après avoir précisé quelles sont les hypothèses de l'étude, en déduire le *Cx* de cet obstacle.

C) Disque dur (10pts)
Un disque dur est essentiellement composé d'un disque de verre recouvert d'une fine couche ferromagnétique, animé d'un mouvement de rotation uniforme et d'une tête de lecture magnétique. La lecture et l'écriture se font de façon magnétique sans qu'il n'y ait aucun contact entre tête et disque. La distance les séparant est tellement faible qu'aucun asservissement n'est actuellement capable de respecter cette contrainte d'autant que les vitesses vont en augmentant.





Le mouvement du disque engendre un écoulement d'air (viscosité cinématique $\nu_0 = 15{,}1.10^{-6}$ m²/s ou viscosité dynamique $\mu_0 = 18{,}2.10^{-6}$ Pa.s) qui crée un coussin d'air hydrodynamique sur lequel repose la tête pendant son fonctionnement. Pour obtenir ce résultat, la tête est inclinée d'un angle α très faible (voir schéma).
On considérera pendant toute l'étude que la tête se situe en périphérie de disque (là où le débit de données est maximal).
Le disque est de format 3,5" soit 8,89 cm de diamètre et tourne à une vitesse de 7200 tr/min.
La longueur L et la largeur l de la tête de lecture valent 1 mm.
La hauteur h_e = 10,1 nm soit $1{,}01.10^{-8}$ m et $h_s = 10^{-8}$ m.

1) On considère dans cette étude que l'air se comporte comme un fluide newtonien isotherme suivant la loi de Stokes.
a) Justifier par un calcul simple que l'écoulement sous la tête est laminaire.
b) Justifier également par un calcul simple que l'écoulement est aussi isochore (pour mémoire, la vitesse du son dans l'air est de l'ordre de 340 m/s).
c) Montrer en complétant ce jeu d'hypothèses que le problème peut se ramener à l'étude d'un écoulement de Poiseuille dans le cas plan. On pourra pour cela considérer que le rayon du disque est très grand devant les autres dimensions.

2) L'énergie potentielle de pesanteur par unité de volume est ici suffisamment faible pour que l'on puisse assimiler la pression motrice p_g à la pression statique p. Par conséquent, l'équation de Poiseuille s'écrit : $\frac{dp}{dx}=\mu_0\frac{d^2u}{dy^2}$ avec $\underline{U}(\underline{x},t)=u\underline{e_x}+v\underline{e_y}+w\underline{e_z}$
a) Énoncer les conditions aux limites du problème puis montrer que :
$$u(y)=\frac{1}{2\mu_0}\frac{dp}{dx}y^2-\left(\frac{V}{h}+\frac{h}{2\mu_0}\frac{dp}{dx}\right)y+V$$

3) On sait que la pression à chaque extrémité de la tête de lecture est égale à la pression atmosphérique.
De plus, on sait que l'expression de la pression relative de l'air en écoulement entre la tête et le disque est : $p-p_0=A\left[\frac{B}{h^2}+\frac{1}{h}+C\right]$ avec $A=\frac{6\mu_0 V}{\alpha}$, $B=\frac{-h_e h_s}{h_e+h_s}$ et $C=\frac{-1}{h_e+h_s}$. On peut donc en déduire l'expression de l'effort normal de sustentation F qui s'exerce sur la tête.

En effet, par définition $F = l * \int_0^L (p - p_0) dx$ où l = largeur de la tête.

a) Sachant que $h = h_e - \alpha x$ différencier cette expression afin d'exprimer dx en fonction de dh.

b) Déterminer l'expression de F à partir de sa définition, de l'expression de la pression relative et du résultat de la question précédente.

c) Faire l'application numérique et commenter en sachant que la masse de la tête est de quelques grammes.