TF 40 Examen Final Le 14/01/2016

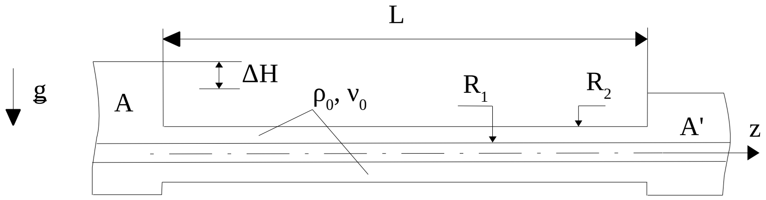
Durée : 2 heures ; le formulaire de TD est le seul document autorisé.

La partie A est à rédiger sur copie séparée.

PARTIE A : ECOULEMENT DANS UN CANAL ANNULAIRE *(9 pts + 2 pts pour la question bonus)*

On considère un canal cylindrique horizontal de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 et de longueur L ($L>>R_1$, R_2) reliant deux vases A et A' contenant un liquide de masse volumique ρ_0 et de viscosité cinématique ν_0. Il existe une différence de niveau constante ΔH entre les surfaces libres des deux vases qui engendre un écoulement laminaire de A vers A'.

On notera l'expression de la vitesse du fluide : $\underline{U}(\underline{x},t)=u\,\underline{e}_r+v\,\underline{e}_\theta+w\,\underline{e}_z$.



1) Énoncez, en les justifiant, les hypothèses nécessaires à l'étude de l'écoulement.

2) Exprimez avec le minimum de calculs l'équation différentielle de l'écoulement. Montrez qu'il s'agit de l'équation de Poiseuille dans le cas cylindrique.

3) Exprimez les conditions aux limites puis montrez que l'expression de la vitesse du fluide dans la partie annulaire du canal est de la forme : $w(r)=K[(r^2-R_2^2)+K'\ln(\frac{r}{R_2})]$ où K et K' sont des constantes à déterminer.

On rappelle que : $\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dw}{dr})$, $\ln(\frac{1}{x})=-\ln(x)$, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

4) Sans faire de calcul supplémentaire, tracez l'allure du profil des vitesses et justifiez.

5) Exprimez la contrainte exercée par le cylindre extérieur de rayon R_2 du canal sur le fluide.

6) En déduire l'effort T_2 exercé par le canal de longueur L sur le fluide.

Question bonus : Exprimez la contrainte exercée par le cylindre intérieur de rayon R_1 du canal sur le fluide, en déduire l'effort T_1 exercé par le canal de longueur L sur le fluide.

Compléments au formulaire :

Équation de continuité en coordonnées cylindriques : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$

Équations de projection de Navier – Stokes en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_g}{\partial r}+\nu_0(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}=-\frac{1}{r}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_g}{\partial\theta}+\nu_0(\frac{\partial^2v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v}{r^2})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_g}{\partial z}+\nu_0(\frac{\partial^2w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2})$$

Quelques éléments du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques :

$$\sigma_{r\theta}=\mu_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)\qquad\sigma_{zr}=\mu_0\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\qquad\sigma_{\theta z}=\mu_0\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)$$

PARTIE B : ETUDE D'UN ECOULEMENT POTENTIEL (noté sur 9 points)**.**
On étudie l'écoulement potentiel défini par la fonction suivante, où V et a sont des constantes :

$$f(z) = -iV\left(z - \frac{a^2}{z}\right)$$

1) Rappeler toutes les hypothèses qui permettent l'étude des écoulements potentiels.
2) Trouver le potentiel des vitesses $\varphi(r,\theta)$ et la fonction courant $\psi(r,\theta)$ de cet écoulement. *Conseil* : utiliser la forme en $z = r e^{i\theta} = r(\theta os \ + isin\theta)$.
3) Montrer que cet écoulement a lieu autour d'un cylindre de rayon a.
4) Trouver les composantes cartésiennes u et v de la vitesse ($\underline{U} = u\,\underline{e}_x + v\,\underline{e}_y$).
Conseil : utiliser la vitesse complexe $\dfrac{df}{dz} = u - iv$, en déduire $u(r,\theta)$ et $v(r,\theta)$.
5) En déduire que quand $r \to \infty$, $u \to 0$ et $v \to V$.
6) En déduire aussi que pour $r = a$ et $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ on a 2 points d'arrêt A' et A.
D'après ce qui précède, décrire cet écoulement en une phrase (une description plus complète qu'à la question 3).
7) On prend $V > 0$. Quelle est la condition sur r pour avoir $\|\,\underline{U}\,\| \simeq V$ à 2% près, c'est-à-dire que $0{,}98\,V \leq \|\,\underline{U}\,\| \leq 1{,}02\,V$.
Conseil : considérer seulement les cas les plus défavorables $\theta = 0$; $\theta = \pi$; $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

APPLICATION NUMERIQUE.
On donne $V = 2$ m/s et $a = 0{,}5$ m, le fluide qui s'écoule a une masse volumique $\rho = 10^3$ kg/m^3.
8) Calculer u et v pour $r = 1$ m et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
9) Les points A', A et B sont pris à la même altitude (le cylindre est à axe vertical et le plan xOy est horizontal). Sachant que la pression d'arrêt en A (ou en A') est $p_A = 10^5$ Pa, trouver la pression p_B au point B défini par $r = a = 0{,}5$ m et $\theta = 0$.

PARTIE C : COUCHE LIMITE LAMINAIRE (2 points de Bonus)**.**
La résolution par Blasius des équations de la couche limite laminaire au-dessus d'une plaque plane est valable pour une gamme d'abscisses x mesurées à partir du bord d'attaque telle que : $x_{mini} \leq x \leq x_C$. La borne supérieure x_C dépend du nombre de Reynolds critique Re_C, tandis que x_{mini} est destinée à éliminer la région proche du bord d'attaque $0 \leq x \leq x_{mini}$ où l'hypothèse simplificatrice de base $v \ll u$ n'est plus vérifiée. On admet généralement qu'il suffit de prendre $x_{mini} = 10^{-2}\,x_C$ pour que l'on ait effectivement $v \ll u$. On se propose ici de le démontrer.

Question : si on prend $\dfrac{x_C}{x_{mini}} = 100$ montrer que l'on aura toujours $\dfrac{v}{u} \leq \dfrac{1}{A}$ et donner la valeur de A pour $Re_C = 5.10^5$ et $\eta = 6$. On rappelle pour cela les résultats vus en cours :

$$u = U_\infty f'(\eta) \quad ; \quad v = U_\infty \frac{\beta}{dx}\left[\eta f'(\eta) - f(\eta)\right] \quad ; \quad \beta = \sqrt{\frac{v_0 x}{U_\infty}} \ .$$

Conseil : en fin de calcul on peut remplacer $\dfrac{v_0}{U_\infty}$ par $\dfrac{x_C}{\Re_C}$ (à justifier). Attention de ne pas confondre v_0 viscosité cinématique avec v composante de la vitesse selon l'axe y.