TF 40 Examen Médian Le 03/11/2011

Durée : 2 heures

Documents autorisés : formulaire de TD + 1 page A4 recto

A) Questions de cours : (6 points)

Un écoulement d'eau est défini par son champ de vitesse en fonction de *x*, *y*, *z* en mètres et *t* en secondes. Les composantes *u*, *v*, *w* de la vitesse sont :

$$u = a\ln\left(\frac{x}{b}\right) - a$$
$$v = a\ln\left(\frac{y}{b}\right) - a\frac{y}{x}$$
$$w = -a\frac{z}{y} + ct$$

où a, b et c sont des constantes dimensionnées ; $\ln\left(\frac{x}{b}\right) = \ln x - \ln b$ est le logarithme népérien. Ce champ de vitesse s'applique dans un domaine fini *D* et pour $t \in [0,\ t_f]$.

1) Quelles sont les dimensions respectives de *a*, *b* et *c* pour avoir *u*, *v*, *w* en $m.s^{-1}$?

2) Cet écoulement est-il isochore ?

3) Donner l'écriture matricielle littérale de :

$$\underline{\underline{grad}}\,\underline{U} \quad \forall M \in D \text{ et } \forall t \in [0,\ t_f]$$

4) En déduire l'écriture matricielle littérale dans *D* de :

$$\underline{\underline{s}} = \mu\left(\underline{\underline{grad}}\,\underline{U} + {}^{T}\underline{\underline{grad}}\,\underline{U}\right)$$

5) On considère dans la suite un point *M* de *D* en *x* = *y* = *z* = 1m et pour *t* = 1s (avec $t_f > 1$). On prend *a* = 0,5 ; *b* = 1 ; *c* = 3. La pression *p* en *M* est fixée à 10^5 Pa et $\mu = 10^{-3}$Pa.s.

Donner l'écriture matricielle de $\underline{\underline{\sigma}}$ en *M* à *t*.

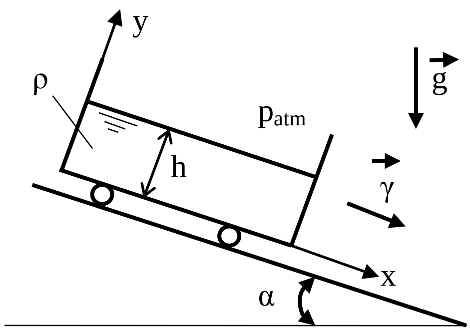
6) *M'* est un point voisin de *M* dont les coordonnées sont *x'* = *y'* = *z'* = 1,01m. En déduire la pression *p'* en *M'* à *t* = 1s en faisant l'approximation du fluide parfait, avec :

$$\frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\underline{grad}(p) + \underline{g_0} \text{ avec } \underline{g_0} = -9{,}81\underline{e_z} \text{ et } \rho_0 = 1000\text{kg.m}^{-3}$$

$$\text{avec aussi } p' - p \approx \underline{grad}(p).\underline{MM'}$$

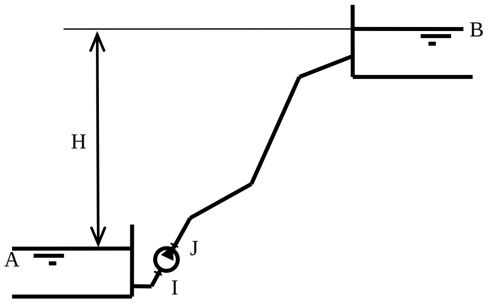
B) Accélération et plan incliné : (4 points)

Un véhicule transportant un récipient ouvert à l'atmosphère roule sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il contient de l'eau de masse volumique $\rho = 998$ kg/m^3.
Le véhicule est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré.
1) Déterminer l'équation de la surface libre.
2) Quelle doit être l'expression de γ pour que la surface libre soit parallèle au plan incliné et telle que dans ce cas la hauteur d'eau soit constante et égale à h ?
3) Faire l'application numérique si $\alpha = 30°$.



C) Stockage d'énergie : (10 points) Les questions 6), 7) et 8) sont indépendantes des précédentes.

On s'intéresse à un moyen de stockage d'énergie. Le principe consiste à remonter de l'eau ($\rho = 998$ kg/m^3, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s) à l'aide d'une station de pompage vers un réservoir (lac) situé en altitude lorsque la production électrique est excédentaire (heures creuses) pour l'envoyer ultérieurement dans une turbine et produire de l'électricité en période de forte consommation.
On considère le circuit de pompage décrit ci-dessous.
La station de pompage relie un lac A en vallée à un lac B situé en altitude. Le dénivelé H entre les surfaces libres est de 120 m.
La pompe est branchée entre les points I et J de la conduite de remontée sans créer de pertes singulières. La conduite a un diamètre constant d = 500 mm et une longueur totale l = 1850 m. On supposera que le coefficient Λ a une valeur de 0,02.
On supposera également que l'ensemble des pertes singulières s'exprime à travers un coefficient global $\xi = 10$.



1) Formuler l'ensemble des hypothèses utiles à l'étude.
2) Exprimer la relation $h_m = f(q_v)$ où h_m est la hauteur manométrique de la pompe et q_v le débit de l'installation.
3) En supposant un débit constant de 250 l/s, quelle sera la hauteur manométrique de la pompe ? En déduire sa puissance hydraulique. Que faut-il penser du résultat ?
4) On décide d'utiliser une pompe dont l'équation caractéristique est $h_m = 10[13- 10q_v{}^2]$ où h_m s'exprime en mètre de colonne d'eau et q_v en m^3/s. En utilisant les résultats de la question 2), déterminer le point de fonctionnement du circuit.
5) Peu satisfait des performances de l'installation, il est décidé de rajouter une seconde pompe, identique à la première, montée en série. Déterminer les valeurs du nouveau point de fonctionnement. Commenter.

On s'intéresse maintenant à la conduite de retour (conduite forcée) qui alimente la turbine. Sa longueur est L = 1835 m et son diamètre D est constant. On supposera ici que les pertes singulières sont négligeables devant les pertes régulières et que le coefficient de pertes régulières est égal à 0,023. Par ailleurs, le régime d'écoulement pourra être considéré comme turbulent rugueux si $R_e \geq 1{,}45 \cdot 10^6$.
La hauteur disponible est bien entendu H = 120 m.

6) Quelles modifications faut-il faire au jeu d'hypothèses utiles à cette partie ?
7) Donner l'expression de la perte de pression Δp_{BA} dans la conduite forcée compte tenu des hypothèses. En déduire la perte de charge ΔH_{BA}.
8) Quel diamètre D doit-on retenir pour cette conduite afin que la perte de charge ne dépasse pas 10 % de la hauteur géométrique H en régime turbulent rugueux ?