TN90 Printemps 2009 **Vendredi 26 juin 2009**

Final - TN90

Durée : **2 heures**.
Aucun document autorisé.
Calculatrice autorisée.

– **Les exercices 1 et 2 sont indépendants**.

Exercice 1 (Barre en traction (*10pt*))

Cet exercice a pour but le calcul de la déformation d'une barre en traction (Figure 1). Nous considérons une barre de longueur D, de section uniforme S et de module d'Young E. Nous supposons que la barre est soumise sur toute sa longueur à une charge répartie axiale $\vec{q} = q\vec{x}$ et qu'elle est encastrée à l'extrémité $x = 0$.

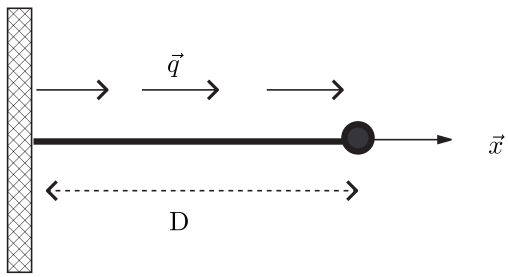


FIGURE 1 – Barre sollicitée en traction

L'équation d'équilibre s'écrit avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} -\mathrm{ES}\ u''(x) = q \qquad \forall x \in [0, \mathrm{D}] \\ u(0) = 0 \\ u'(\mathrm{D}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

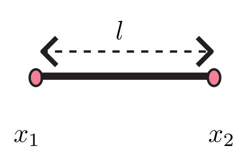
1. Établir, en justifiant votre démarche, la forme faible associée à l'équation (1) suivante :

$$\mathrm{ES} \int_0^{\mathrm{D}} \phi'(x) u'(x) dx = q \int_0^{\mathrm{D}} \phi(x) dx \quad \forall\ \phi(x)$$

Construction de l'approximation élémentaire de $u(x)$

On propose maintenant de résoudre numériquement l'équation (1) en utilisant la méthode des éléments finis. Pour ce faire, nous allons utiliser **une approximation linéaire à une dimension** de u. On considère donc un élément fini linéaire à 2 nœuds d'interpolation de longueur l. L'approximation, $\tilde{u}^e(x)$, du déplacement sur un élément de ce type s'écrit donc :

$$\tilde{u}^e(x) = \sum_{i=1}^{i=2} \mathrm{N}_i(x) u_i \quad avec \quad \begin{cases} \mathrm{N}_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \\ \mathrm{N}_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$



où le déplacement du nœud i est noté u_i.

2. Donner $\{\boldsymbol{u^e}\}$ le vecteur des déplacements nodaux de l'élément.
3. Exprimer la matrice $[\mathbf{N^e}]$ telle que :

$$\tilde{u}^e(x) = [\mathbf{N^e}]\,\{\boldsymbol{u^e}\} \tag{2}$$

4. Calculer $\left[\mathbf{B^e}\right]$ la matrice des dérivées des fonctions de forme telle que la dérivée de l'approximation sur l'élément s'écrive :

$$\tilde{u'}^e(x) = \left[\mathbf{B^e}\right]\{\boldsymbol{u^e}\} \tag{3}$$

Matrice de rigidité et vecteur force élémentaires

5. Montrer que la matrice de rigidité élémentaire peut s'écrire sous la forme :

$$[\mathbb{K}^e] = \mathrm{ES}\int_{x_1}^{x_2} {}^t\left[\mathbf{B^e}\right]\left[\mathbf{B^e}\right] dx$$

6. Montrer que le vecteur force élémentaire est de la forme :

$$\{\mathbf{F^e}\} = q\int_{x_1}^{x_2} {}^t[\mathbf{N^e}]dx$$

On admettra maintenant que :

$$[\mathbb{K}^e] = \frac{\mathrm{ES}}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad \{\mathbf{F^e}\} = \frac{ql}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Matrice de rigidité globale

On discrétise maintenant la structure en **deux éléments finis linéaires** du type précédent de taille identique $\frac{\mathrm{D}}{2}$.

7. Donner $\{\boldsymbol{u}\}$ le vecteur des déplacements nodaux du problème.
8. Déterminer la matrice de rigidité globale $[\mathbb{K}]$.
9. Déterminer le vecteur force global $\{\mathbf{F}\}$.
10. Déterminer le vecteur des déplacements $\{\boldsymbol{u}\}$ solution de

$$[\mathbb{K}]\,\{\boldsymbol{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Exercice 2 (Déformations planes (*10pt*))

Présentation du problème mécanique

On considère le solide homogène élastique triangulaire (ABC) de coté $l = 1$, d'épaisseur $e = 1$, de caractéristiques mécaniques E et ν représenté la figure 2. Le solide est encastré dans une fondation rigide entre B et C. Il est soumis à une distribution linéaire de force horizontale $\vec{f} = f\vec{x}$ le long de AC.

Le vecteur déplacement d'un point M quelconque est noté :

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \tag{4}$$

On se propose maintenant de trouver l'équilibre de cette structure en utilisant la méthode des éléments finis.

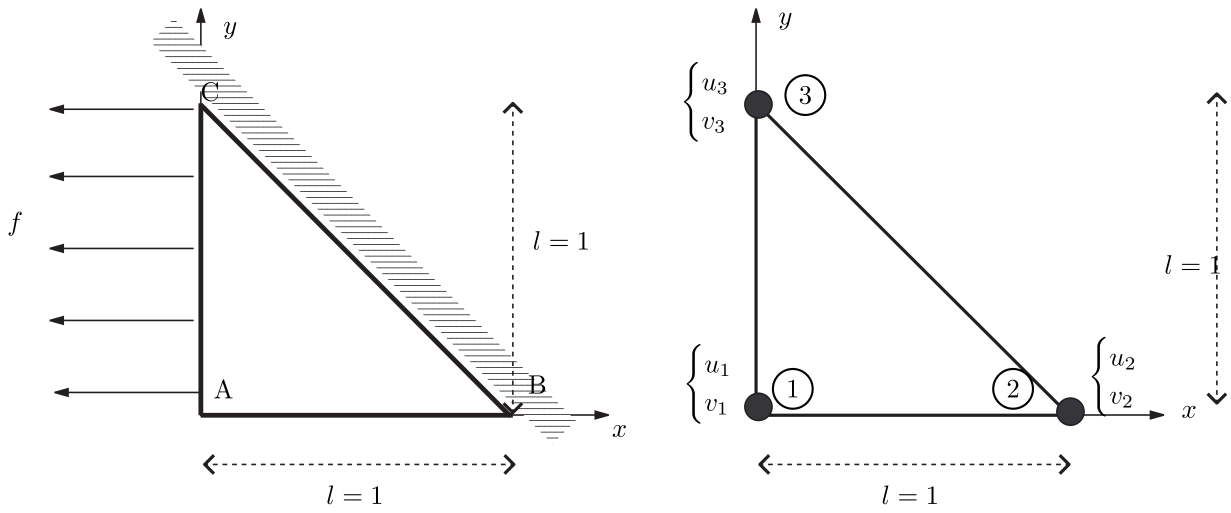


FIGURE 2 – État de déformations planes

Construction de l'approximation du déplacement

On cherche à construire une approximation linéaire de $\boldsymbol{u}(x, y)$. Pour ce faire, on discrétise la structure en **un seul élément fini linéaire** à 3 nœuds d'interpolation. Les coordonnées du déplacement du nœud i sont notées u_i et v_i (Figure 2).

L'approximation élémentaire de chacune des composantes du déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^e(x,y) &= \sum_{i=1}^{i=3} \mathrm{N}_i(x,y)\ u_i \\ \tilde{v}^e(x,y) &= \sum_{i=1}^{i=3} \mathrm{N}_i(x,y)\ v_i \end{aligned}$$

1. Donner $\{\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{e}}\}$ le vecteur des déplacements nodaux de l'élément.
2. Montrer que les fonctions de forme $\mathrm{N}_i(x, y)$ pour $i = 1, 2, 3$ sont :

$$\begin{cases} \mathrm{N}_1(x,y) = & 1 - x - y \\ \mathrm{N}_2(x,y) = & x \\ \mathrm{N}_3(x,y) = & y \end{cases}$$

3. Exprimer la matrice $[\mathbf{N^e}]$ telle que :

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^e(x,y) = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^e(x,y) \\ \tilde{v}^e(x,y) \end{Bmatrix} = [\mathbf{N^e}]\,\{\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{e}}\} \tag{5}$$

4. Quelles sont les conditions aux limites de ce problème ?

Construction de l'approximation de la déformation

On cherche à déterminer l'état de **déformations planes** du solide élastique par la méthode des éléments finis. Soit le vecteur des déformations :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

5. Montrer que $\{\varepsilon\}$ s'exprime comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right\}$$

6. Calculer $\left[\mathbf{B}^{\boldsymbol{e}}\right]$ la matrice des dérivées des fonctions de forme telle que l'approximation de la déformation sur l'élément s'écrive :

$$\{\tilde{\varepsilon}^{\boldsymbol{e}}\} = \left[\mathbf{B}^{\boldsymbol{e}}\right]\{\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{e}}\} \tag{6}$$

Nous rappelons que la loi de Hooke s'écrit :

$$\{\sigma\} = [\mathbb{D}]\{\varepsilon\}$$

En déformations planes, nous avons plus particulièrement :

$$\{\sigma\} = \left\{\begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array}\right\} = \frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array}\right\}$$

Principe des travaux virtuels

7. En appliquant le principe des travaux virtuels, donner l'expression
   (a) de $[\mathbb{K}^e]$, **matrice de rigidité élémentaire** en fonction de $[\mathbb{D}]$ et $\left[\mathbf{B}^{\boldsymbol{e}}\right]$.
   (b) de $\{\mathbf{F}^{\boldsymbol{e}}\}$, le **vecteur force élémentaire** en fonction de f et $[\mathbf{N}^{\mathbf{e}}]$.

où $[\mathbb{K}^e]$ et $\{\mathbf{F}^{\boldsymbol{e}}\}$ sont tels que

$$[\mathbb{K}^e]\{\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{e}}\} = \{\mathbf{F}^{\boldsymbol{e}}\}$$

Système à résoudre

Pour facilité les calculs (au détriment du sens physique !), nous supposons ici que $\mathrm{E} = 1$, $\nu = 1$ et $f = -1$.

8. Calculer la matrice de rigidité $[\mathbb{K}^e]$ et le vecteur force $\{\mathbf{F}^{\boldsymbol{e}}\}$, et donner le système à résoudre.
9. Résoudre le problème.