Final de l'UV TN90

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

- Les exercices 1 et 2 sont indépendants.
- Toute réponse non justifiée sera ignorée.
- Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.

Pour vous éviter des calculs !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & -10 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$D = 10^{11} \begin{pmatrix} 2.6374 & -0.3571 & -2.5275 & -0.0275 \\ -0.3571 & 7.3516 & 0.0275 & -7.3132 \\ -2.5275 & 0.0275 & 2.6374 & 0.3571 \\ -0.0275 & -7.3132 & 0.3571 & 7.3516 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow D^{-1} = 10^{-9} \begin{pmatrix} 0.0526 & 0.0392 & 0.0450 & 0.0370 \\ 0.0392 & 0.5126 & -0.0370 & 0.5119 \\ 0.0450 & -0.0370 & 0.0526 & -0.0392 \\ 0.0370 & 0.5119 & -0.0392 & 0.5126 \end{pmatrix}$$

$$E = 10^{11} \begin{pmatrix} 2.6374 & -0.3571 & -1.3187 & 0.3571 \\ -0.3571 & 7.3516 & 0.3571 & -3.6758 \\ -1.3187 & 0.3571 & 2.6374 & -0.3571 \\ 0.3571 & -3.6758 & -0.3571 & 7.3516 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow E^{-1} = 10^{-11} \begin{pmatrix} 0.5070 & 0.0083 & 0.2513 & -0.0083 \\ 0.0083 & 0.1819 & -0.0083 & 0.0901 \\ 0.2513 & -0.0083 & 0.5070 & 0.0083 \\ -0.0083 & 0.0901 & 0.0083 & 0.1819 \end{pmatrix}$$

$$F = 10^{11} \begin{pmatrix} 2.6374 & 0.3571 & -1.3187 & -0.3571 \\ 0.3571 & 7.3516 & -0.3571 & -3.6758 \\ -1.3187 & -0.3571 & 2.6374 & 0.3571 \\ -0.3571 & -3.6758 & 0.3571 & 7.3516 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow F^{-1} = 10^{-11} \begin{pmatrix} 0.5070 & -0.0083 & 0.2513 & 0.0083 \\ -0.0083 & 0.1819 & 0.0083 & 0.0901 \\ 0.2513 & 0.0083 & 0.5070 & -0.0083 \\ 0.0083 & 0.0901 & -0.0083 & 0.1819 \end{pmatrix}$$

Exercice 1 (Optimisation)

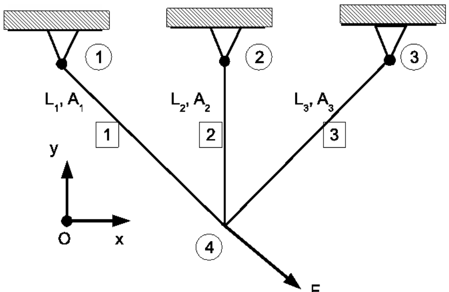


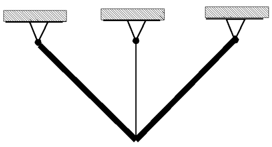
FIGURE 1 – Treillis

Nous considérons une structure treillis (3 barres), représentée sur la figure 1. Nous notons :
– L_i la longueur de la barre i,
– A_i l'aire de la section de la barre i.

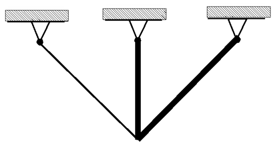
La structure est encastrée aux nœuds 1,2 et 3. Un effort F est appliqué au niveau du nœud 4. Nous cherchons à déterminer la structure faisant intervenir un volume minimal de matière, supportant la charge extérieure donnée F (orientée comme sur la figure 1). Autrement dit, la contrainte σ_i, dans chaque barre i, doit rester inférieure à une contrainte admissible σ_i^{ad}.

Pour ce faire, nous faisons une optimisation dite structurelle : les coordonnées des nœuds ne doivent pas bouger, seules les sections des barres sont modifiables.

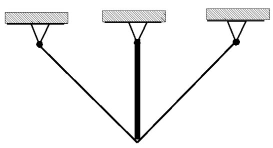
1. Quelles sont les variables d'optimisation (conception) de ce problème ?
2. Quelle est la fonction objectif ? On note cette fonction V.
3. Donner l'expression de V en fonction des variables de conception.
4. Donner une formulation mathématique de ce problème d'optimisation avec contraintes.
5. Pour résoudre ce problème d'optimisation, vous avez le choix entre plusieurs algorithme d'optimisation, notamment un algorithme de type gradient.
   (a) Quels sont les inconvénients majeurs d'un tel algorithme ?
   (b) Pouvez vous citer d'autres techniques d'optimisation ? Si oui quels sont leurs avantages ? Leurs inconvénients ?
   (c) Le problème de minimisation a été résolu. Quelle est, selon vous, parmi les trois structures représentées sur la figure 2, celle qui sera la solution au problème d'optimisation posé ? Les trais épais (respectivement fins) indiquent des barres à fortes (respectivement faibles) sections.



(a) Structure 1



(b) Structure 2



(c) Structure 3

FIGURE 2 – Structure optimale

Exercice 2

1 Présentation du problème mécanique

Soit une structure plane très mince (épaisseur $b = 1mm$, dans la direction z) de longueur $\mathrm{L} = 1m$ et de largeur $h = 0.1m$. La structure est formée d'un matériau homogène isotrope, $\mathrm{E} = 2 \times 10^{11}\mathrm{P}a$ et $\nu = 0,3$. Elle est encastrée sur un côté, et est soumise à une charge surfacique $f_s = 6 \times 10^6\mathrm{P}a$ (Figure 3).

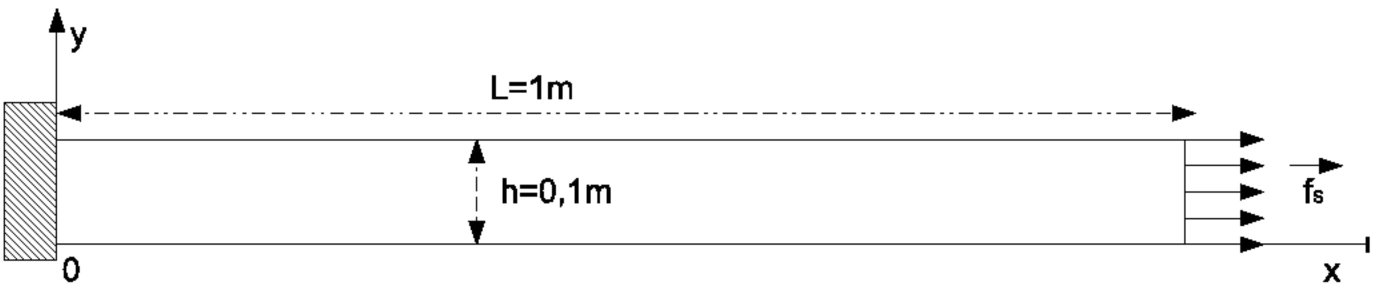


FIGURE 3 – Présentation du problème mécanique

1. Nous allons utiliser pour ce problème **l'hypothèse des contraintes planes**.
   (a) Comment justifiez vous ce choix ?
   (b) Quelles simplifications cette hypothèse impose-t-elle sur l'écriture de la matrice de contraintes ?
2. Quelle est l'équation aux dérivées partielles qui régit ce problème mécanique ?
3. Notre objectif est de résoudre, via la méthode des éléments finis (MEF), cette équation aux dérivées partielles (EDP).

(a) Comment s'appelle, en mécanique, la formulation faible de cette EDP ?

(b) Quel est son principe fondamental ?

Dans ce problème d'élasticité plane, le vecteur déplacement et le vecteur des déformations d'un point M quelconque sont notés :

$$\vec{\boldsymbol{u}}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad et \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Nous rappelons que la loi de Hooke s'écrit en contraintes planes

$$\{\sigma\} = [\mathbb{D}]\{\varepsilon\} \Longleftrightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

4. Donner l'expression du vecteur $\{\varepsilon\}$ en fonction des déplacements $u(x,y)$ et $v(x,y)$.

2 Résolution du problème via la MEF

On voudrait maintenant déterminer la solution de ce problème en utilisant **la méthode des éléments finis**.

2.1 Approximation élémentaire du déplacement

On souhaite mailler cette pièce à l'aide d'un seul élément fini quadrangulaire (de type Q_4) à 4 nœuds d'interpolation (Figure 4). On admet que l'approximation élémentaire de chacune des composantes du déplacement s'écrit sous la forme :

$$\tilde{u}^e(x,y) = [\boldsymbol{b}(x,y)]\{\boldsymbol{p}\} \Longleftrightarrow \tilde{u}^e(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}\{\boldsymbol{p}\}$$

$$\tilde{v}^e(x,y) = [\boldsymbol{b}(x,y)]\{\boldsymbol{q}\} \Longleftrightarrow \tilde{v}^e(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}\{\boldsymbol{q}\}$$

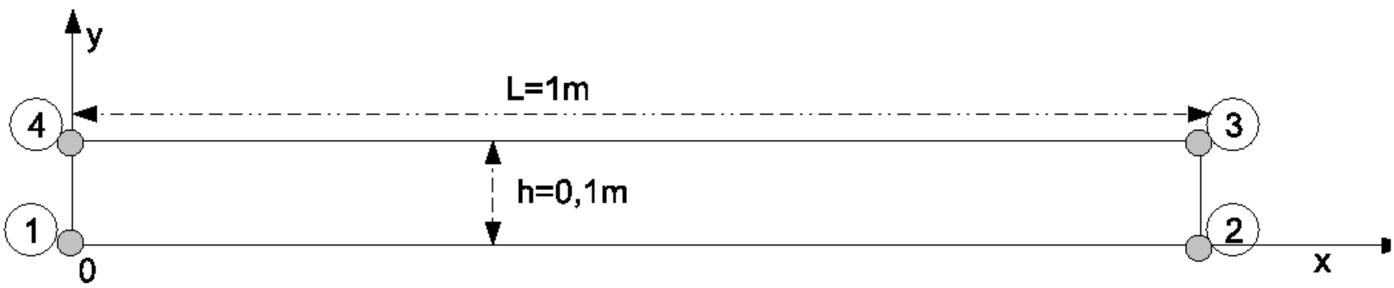


FIGURE 4 – Maillage

5. Donner $\{\boldsymbol{u^e}\}$ les vecteurs des déplacements nodaux d'un tel élément.
6. Déterminer les coefficients $\{\boldsymbol{p}\}$ (respectivement $\{\boldsymbol{q}\}$).
7. Montrer que l'approximation élémentaire de chacune des composantes du déplacement s'écrit alors :

$$\begin{cases} \tilde{u}^e(x,y) = \mathrm{N}_1(x,y)\ u_1 + \mathrm{N}_2(x,y)\ u_2 + \mathrm{N}_3(x,y)\ u_3 + +\mathrm{N}_4(x,y)\ u_4 \\ \tilde{v}^e(x,y) = \mathrm{N}_1(x,y)\ v_1 + \mathrm{N}_2(x,y)\ v_2 + \mathrm{N}_3(x,y)\ v_3 + \mathrm{N}_4(x,y)\ v_4 \end{cases}$$

où $\mathrm{N}_1(x,y)$, $\mathrm{N}_2(x,y)$, $\mathrm{N}_3(x,y)$ et $\mathrm{N}_4(x,y)$ les fonctions de forme de l'élément :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_1(x,y) &= 10xy - 10y - x + 1 \\ \mathrm{N}_2(x,y) &= x - 10xy \\ \mathrm{N}_3(x,y) &= 10xy \\ \mathrm{N}_4(x,y) &= 10y - 10xy \end{aligned}$$

8. Exprimer la matrice $[\mathbf{N^e}]$:

$$\vec{\tilde{u}^e}(x,y) = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^e(x,y) \\ \tilde{v}^e(x,y) \end{Bmatrix} = [\mathbf{N^e}]\{\boldsymbol{u^e}\} \tag{2}$$

2.2 Approximation élémentaire de la déformation

9. Calculer $\left[\mathbf{B}^{e}\right]$, la matrice des dérivées des fonctions de forme telle que l'approximation de la déformation sur l'élément s'écrive :

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = \left[\mathbf{B}^{e}\right]\{\boldsymbol{u}^{e}\} \tag{3}$$

2.3 Matrice de rigidité

10. Exprimer en justifiant précisément vos réponses (⚠ On ne vous demande pas d'effectuer de calculs) :
    (a) $[\mathbb{K}^e]$, **la matrice de rigidité élémentaire d'un tel élément**.
    (b) $\{\mathbf{F}^{e}\}$, **le vecteur force élémentaire d'un tel élément** .
11. Comment procède-t-on pour évaluer le coefficient $\mathbb{K}^e(1,1)$? On vous demande de donner les grandes étapes du calcul.
12. Comment procède-t-on pour évaluer le coefficient $\mathbf{F}^e(1)$. ? On vous demande de donner les grandes étapes du calcul.

2.4 Résolution

On admet ici que :

$$[\mathbb{K}^e] = 10^{11}\begin{bmatrix} 2.6374 & 0.3571 & 1.2088 & -0.0275 & -1.3187 & -0.3571 & -2.5275 & 0.0275 \\ 0.3571 & 7.3516 & 0.0275 & 3.6374 & -0.3571 & -3.6758 & -0.0275 & -7.3132 \\ 1.2088 & 0.0275 & 2.6374 & -0.3571 & -2.5275 & -0.0275 & -1.3187 & 0.3571 \\ -0.0275 & 3.6374 & -0.3571 & 7.3516 & 0.0275 & -7.3132 & 0.3571 & -3.6758 \\ -1.3187 & -0.3571 & -2.5275 & 0.0275 & 2.6374 & 0.3571 & 1.2088 & -0.0275 \\ -0.3571 & -3.6758 & -0.0275 & -7.3132 & 0.3571 & 7.3516 & 0.0275 & 3.6374 \\ -2.5275 & -0.0275 & -1.3187 & 0.3571 & 1.2088 & 0.0275 & 2.6374 & -0.3571 \\ 0.0275 & -7.3132 & 0.3571 & -3.6758 & -0.0275 & 3.6374 & -0.3571 & 7.3516 \end{bmatrix}$$

et

$$\{\mathbf{F}^{e}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300000 \\ 0 \\ 300000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

13. Quelles sont les conditions aux limites de ce problème ?
14. Résoudre le problème. Spécifier les unités de vos résultats.
15. Selon vous, comment va se déformer cette structure ? Représenter cette déformée.
16. En remarquant que $u_2 = u_3 = a$ et que $v_2 = -v_3 = b$, exprimer $\tilde{u}^e(x,y)$ (respectivement $\tilde{v}^e(x,y)$) en fonction de a, x, et y (respectivement b, x et y). Confirmer (ou infirmer) votre intuition de la question 15.
17. Calculer le champ des contraintes sur cet élément.