FINAL DE L'UV TN90

Durée : 2h.
Document autorisé : polycopié de cours.
Calculatrice autorisée.

- Toute réponse non justifiée sera ignorée.
- Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.
- Les deux exercices sont indépendants et **doivent être rédigés sur des copies distinctes.**
- Attention note éliminatoire : 5/20.
- **Barème prévisionnel :** Problème 14/20 et cas d'étude 6/20.

PROBLEME

Nouvelle copie !
Les parties de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante.

Nous considérons l'équation différentielle de la chaleur en 1D définie sur le domaine Ω tel que x∈[0,L] avec les conditions aux limites T(0)=20°C et T(L)=60°C. Le problème (P) s'écrit donc :

$$(P)\begin{cases} k\dfrac{d^2T(x)}{dx^2}+f=0 \\ T(0)=20°C \quad T(L)=60°C \end{cases} \qquad (1)$$

Avec k= 50 W/m.K, f= 10 W/m^3 et L=4 m

L'objectif de ce problème est de comparer la solution exacte de ce problème à une solution approchée obtenue via la méthode des éléments finis.

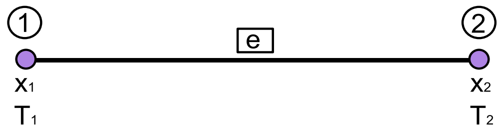
PARTIE A : FORMUMLATION FAIBLE ET SOLUTION EXACTE

1. Résoudre analytiquement le problème (P) (On pourra garder k et f dans les expressions).
2. Ecrire le résidu $R\left(\tilde{T}(x)\right)$ de l'équation différentielle.
3. Ecrire la formulation intégrale forte du problème (P).
4. En intégrant par parties, puis en utilisant les conditions aux limites, déterminer la formulation intégrale faible du problème (P).

PARTIE B : DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

On propose maintenant de résoudre numériquement le système d'équations (1) en utilisant la **méthode des éléments finis**. Nous souhaitons utiliser une **approximation linéaire à une dimension** de

T. On considère donc un élément fini $\boxed{e}$ à deux nœuds de la forme $[x_1, x_2]=[0,L]$, de longueur L, comme représenté sur la figure suivante.



On cherche une approximation élémentaire de T sous la forme :

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^e(x) = [\boldsymbol{b}(x)].\{\boldsymbol{p}\}$$

5. Quelle est l'expression de la base polynomiale $[\boldsymbol{b}(x)]$?
6. On note T_1 et T_2 les valeurs de la température T respectivement aux nœuds 1 et 2. En utilisant la notion d'**approximation nodale**, déterminer les coefficients inconnus {**p**}.
7. **En déduire** que les fonctions de forme sont les suivantes :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$
$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$

PARTIE C : GALERKIN ET QUANTITES ELEMENTAIRES

Nous allons maintenant procéder à la discrétisation de cette formulation intégrale. On considère alors que la formulation intégrale faible est :

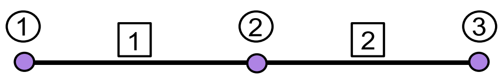
$$\int_0^L \frac{dT}{dx}(x)\frac{d\Phi}{dx}(x)dx = \frac{f}{k}\int_0^L \Phi(x)dx \qquad (2)$$

8. En utilisant l'approximation élémentaire que l'on a choisie précédemment, et la méthode de Galerkin appliquée à la formulation intégrale faible, montrer que le système matriciel élémentaire d'un tel élément s'écrit :

$$\frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{fL}{2k}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PARTIE D : ASSEMBLAGE ET RESOLUTION

On considère le domaine D contenant 2 éléments identiques de longueur $\frac{L}{2}$, comme représenté sur la figure suivante :



9. Ecrire le système matriciel élémentaire pour chacun des éléments du maillage.
10. Procéder à l'assemblage et donner l'expression de la matrice de rigidité globale $[K]$ et du vecteur du second membre global {F} du système à résoudre tels que l'on ait :

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

11. Trouver les températures aux nœuds 1, 2 et 3 en résolvant le système final qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{10}{50} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

12. Comparer avec la solution analytique.

CAS D'ETUDE

Nouvelle copie !

On se propose de modéliser une éprouvette de traction de type haltère (figure 1). Soumise à une charge horizontale ponctuelle d'intensité F = 12.5 KN appliquée en ses deux extrémités, l'éprouvette est en acier de module d'Young E = 210 GPa et de coefficient de Poisson υ = 0.28.

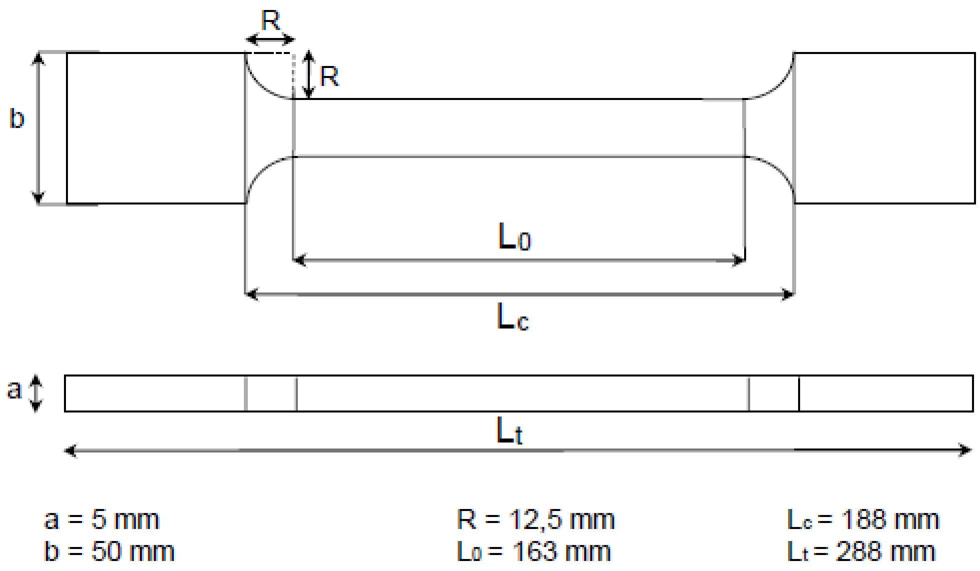


Figure 1: Dimension de l'éprouvette

Nous souhaitons réaliser une analyse (HPP) par éléments finis du problème ci-dessus en utilisant un code éléments finis, ABAQUS par exemple. Dans ce qui suit, on vous demande de répondre aux grandes interrogations liées à la mise en place d'une analyse par éléments finis.

<u>Les réponses à vos questions devront être claires et concises (Maximum 5 lignes / réponse).</u>

1. HYPOTHESES GEOMETRIQUES (MODULE PART)

1. Espace de modélisation.
   1.1. Quelles sont les modélisations géométriques envisageables pour ce problème ?
   1.2. Pour chacune d'entre elles, préciser toutes les hypothèses associées.
2. Symétrie.
   2.1. Quelles symétries sont utilisables pour réduire le problème? Justifier.
   2.2. Préciser ce qu'impliquent ces symétries sur votre modélisation.
3. Quel type de modélisation avez-vous retenu ? (Dessin explicatif).
4. Dans quel système d'unités travaillez-vous ? (Longueur, Force, Contraintes/Modules)

LOIS DE COMPORTEMENT (MODULE PROPERTY)

5. Quel type de loi de comportement utilisez-vous ici. Détailler.

TYPE DE PROBLEME A RESOUDRE (MODULE STEP)

6. Quel type d'analyse allez-vous réaliser et pourquoi ?
7. Quelle est la démarche suivie dans les grandes lignes ?

On a vu dans la partie 1 que plusieurs modélisations géométriques sont possibles et que des symétries sont envisageables. **On suppose maintenant que vous avez fait le choix d'une modélisation géométrique.**

CONDITIDITIONS AUX LIMITES (MODULE LOAD)

8. Quelles sont les conditions aux limites pour votre modélisation géométrique ?

MAILLAGE (MODULE MESH)

9. *Forme des éléments*. Quels sont les formes d'éléments possibles pour votre maillage ?
10. *Type d'approximation*. Quels sont les types d'approximation possibles ? Quels sont leurs avantages ? Inconvénients ?
11. Prenez vous des précautions particulières pour le maillage ? Si oui, où ? Pourquoi ?