Médian - TN90

Durée : **2 heures**.
Aucun document autorisé.
Calculatrice autorisée.

- **Les exercices 1 et sont indépendants et seront rédigés sur deux copies différentes**.

Exercice 1 (Un chariot-ressort)

Soit le système constitué de trois chariots 1, 2 et 3 reliés entre eux par 4 ressorts de raideur respective k_1, k_2, k_3, k_4 (Figure 1). Ces chariots sont tirés par une force $F = 90$ appliquée au chariot 3. Les chariots se déplacent horizontalement. On cherche le déplacement de chaque chariot.

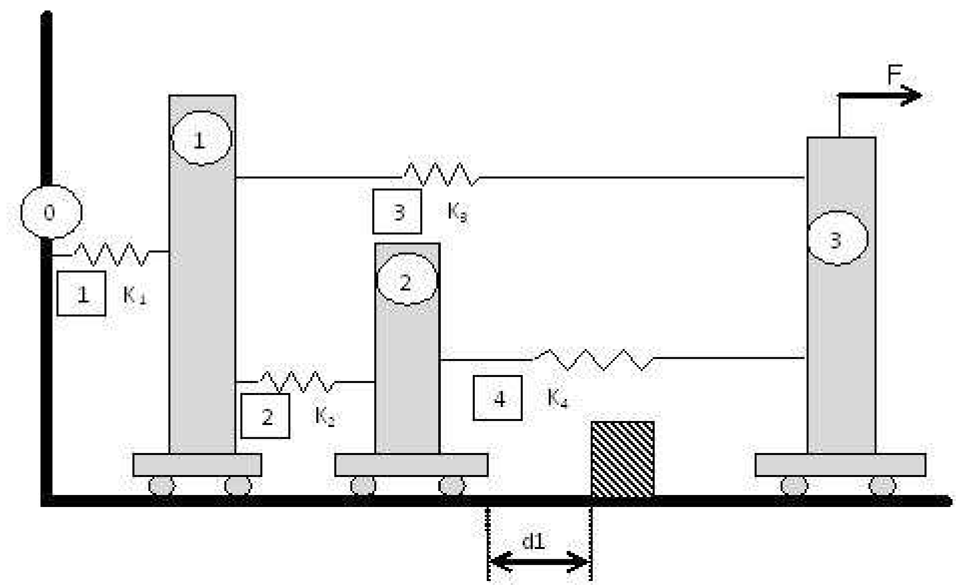


Figure 1 – Chariot-Ressort

1. Donner le tableau de connectivité de ce problème.
2. Ecrire les matrices élémentaires de ce problème en utilisant la loi de comportement d'un ressort.
3. Assembler ce système et donner la matrice globale.
4. Introduire les conditions limites.
5. Résoudre le système linéaire qui donne le déplacement de chaque chariot. On prendra pour simplifier les calculs : $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k = 10$.
6. On note, $d_1 = 8$, la distance entre le chariot 2 et le muret, calculer la valeur de la nouvelle force F pour éviter le contact entre le chariot et le muret.

Exercice 2 (Un treillis à 5 barres)

Un rappel

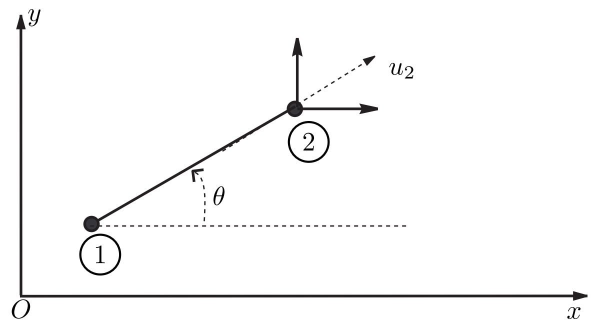


Figure 2 – Barre

Considérons une barre de longueur L, de section A, de module d'Young E (Figure 2). La matrice de rigidité locale est donnée par :

$$K_{loc} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$k = \frac{EA}{L}$$

Nous rappelons que la matrice de rigidité dans le repère global est :

$$K_{globale} = k \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \quad avec \quad \begin{cases} c = \cos\theta \\ s = \sin\theta \end{cases}$$

où θ représente l'angle entre l'axe x du repère global et la barre étudiéee (Figure 2).

Partie A

Soit un assemblage de 5 barres représenté (Figure 3) articulé aux nœuds 1 et 4 (c'est-à-dire pas de déplacement horizontal et vertical). Il est soumis à une force verticale F au nœud 2. On introduit les notations suivantes :

- L_1 : la longueur de la barre 1,
- L_2 : la longueur de la barre 2,
- L_3 : la longueur de la barre 3.

Les caractéristiques mécaniques sont :

- pour la barre 1 (resp. 5) : module d'Young E_1, longueur L_1 et section A_1,
- pour la barre 2 (resp. 4) : module d'Young E_2, longueur L_2 et section A_2,
- pour la barre 3 : module d'Young E_3, longueur L_3 et section A_3.

1. Exprimer les grandeurs L_1, L_2 et L_3 en fonction du paramètre L. Donner également les coordonnées de chacun des nœuds.

2. On constate que ce treillis présente une symétrie. Pour simplifier et faciliter son étude, nous allons en tenir compte.

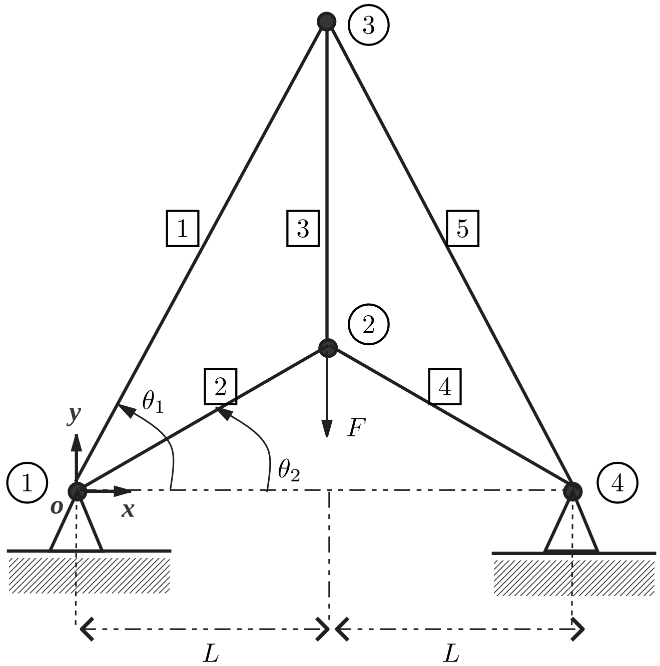
2.1. Quelles conditions devons nous imposer aux déplacements des nœuds 2 et 3 pour prendre en compte cette symétrie ?

2.2. Quelle condition devons nous imposer à la charge F ?

2.3. Quelle condition devons nous imposer à la section de la barre 3 ?

On se contentera dans la suite d'étudier **la moitié du treillis** (Figure 4).

3. Quelle est la taille de la matrice globale du système ? Donner les degrés de liberté du système.



$$E_1 = E_2 = E_3 = 2 \times 10^6 \; MPa$$

$$F = 100 \; KN$$

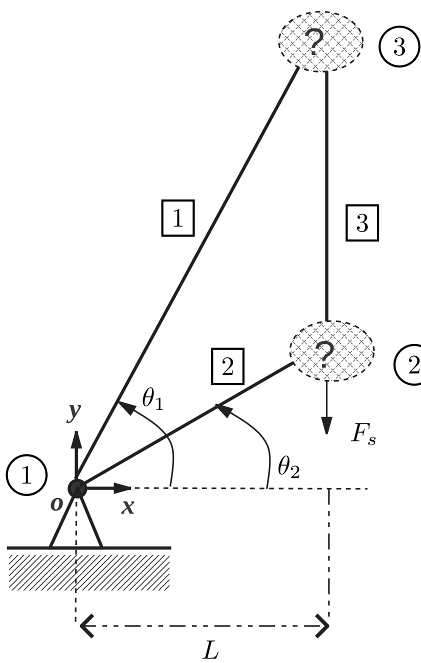
$$A_1 = A_2 = A_3 = 20 \; mm^2$$

$$L = 400mm$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

Figure 3 – Treillis à 5 barres



$$E_1 = E_2 = E_3 = 2 \times 10^6 \; MPa$$

$$F_S = ? \; KN$$

$$A_3 = ? \; mm^2$$

$$A_1 = A_2 = 20 \; mm^2$$

$$L = 400mm$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

Figure 4 – Demi-treillis

4. Donner le tableau de connectivité.

Dans un souci de simplification, l'application numérique ne sera traitée qu'en dernier lieu. On utilisera donc les notations

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1}, \; k_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2}, \; k_3 = \frac{E_3 A_3}{L_3},$$

dans les expressions à venir des matrices.

5. Déterminer l'expression de chaque matrice élémentaire.

6. Assembler ces matrices et en déduire la matrice de rigidité globale de la structure.

7. Définir les conditions aux limites et rappeler les conditions de symétrie.

8. Donner le vecteur des forces extérieures $\mathbf{f}$.
9. Détermination des déplacements.
   - **9.1.** Résoudre le système $\mathbb{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ donnant les déplacements des différents nœuds.
   - **9.2.** **Application numérique**. Donner les valeurs des déplacements des différents nœuds.
10. Calculer les réactions d'appui.
11. Vérifier le principe fondamental de la statique.

Partie B

Considérons le demi-treillis de la figure 4. Il y a deux variables d'optimisation :

– A_1 : aire de section de la barre 1 et de la barre 3 (du treillis entier)

– A_2 : aire de section de la barre 2.

1. Effectuer l'analyse des sensibilités de la compliance $g = \mathbf{f^T u}$ (produit scalaire du vecteur des forces $\mathbf{f}$ et du vecteur des déplacements $\mathbf{u}$) par rapport à ces 2 variables d'optimisation.
2. Quelles conclusions peut-on tirer de cette analyse des sensibilités ?

Remarque : exprimer la matrice globale $\mathbb{K}$ assemblée en tenant compte des conditions aux limites, en fonction des variables d'optimisation A_1 et A_2. Prendre les valeurs numériques des déplacements $\mathbf{u}$ calculés à la question 9.